Nachricht

von

dem Zustande des städtischen Gymnasiums zu Danzig

während

des Schuljahres von Ostern 1832 bis 1833.

Womit

zu der auf Freitag, den 29. März angesetzten

öffentlichen Schulprüfung

ergebenst einladet

Georg Schoeler,
Professor.

Danzig, 1832 bis 1833
gedruckt in der Wedelschen Hofbuchdruckerei.

I. Lehrverfassung.

Im verflossenen Schuljahre sind folgende Lehrgegenstände behandelt worden:

IN SEXTA.

Ordinarius Oberlehrer Skusa.

Deutsch. Leseübungen, verbunden mit mündlichem Vortrage des Gelesenen. Declamation. Grammatische und orthographische Uebungen. Kleine Aufsätze. 6 St. wöchentlich. Oberlehrer Skusa. Deutsche Uebungen. 2 St. Dr. Hintz.

Latein. Mündliches und schriftliches Uebersetzen aus dem ersten Cursus von Ellendts lateinischem Lesebuche, verbunden mit dem Erlernen der regelmässigen grammatischen Formen (Etymologie und Syntax) nach Zumpts lat. Schulgrammatik. 7 St. Oberlehrer Skusa.

Religion. Biblische Geschichte nach Kohlrausch, verbunden mit Erklärung und Auswendiglernen biblischer Sprüche und passender Liederverse. 2 St. Derselbe.

Mathematik. Die Rechnung mit Brüchen, und mit ganzen und gebrochenen benannten Zahlen. Uebungen im Kopfrechnen. Hr. Schulamtscandidat Hasse.

Geographie. Die wichtigsten Gebirge, Flüsse und Städte in Europa und den übrigen Erdtheilen. Geographie von Preussen. 3 St. Oberlehrer Skusa.

Naturgeschichte. Einheimische Naturproducte beschrieben. 2 St. Derselbe.

Zeichnen. 2 St. Hr. Breysig.

Schreiben. 4 St. Hr. Waage.

IN QUINTA.

Ordinarius Dr. Hintz.

Deutsch. Sprachlehre. Correctur schriftlicher Aufsätze. Lectüre und Declamation. 6 St. Dr. Hintz.

Latein. Grammatik. Syntactische Uebungen, mündlich und schriftlich. Lesung von Ellendts Elementarbuch. 7 St. Dr. Hintz.

NB. Seit Michaelis wurden wöchentlich hievon 2 Stunden Herrn Hasse zugetheilt, welcher sie zu practischen Uebungen verwandte.

Religion. Biblische Geschichte des alten und neuen Testaments (ausführlicher als in Sexta.) Erklärung einiger Psalmen und einzelner Abschnitte aus den Evangelien. 2 St. Oberlehrer Skusa.

Mathematik. Proportions- Gesellschafts- Zins- Kettenrechnung. Uebung im Kopfrechnen. Hr. Oberlehrer Dirlam.

Geographie. Die Erde als Weltkörper nach astronomischen und mathematischen Verhältnissen. Ueberblick der Erdtheile und Oceane; hierauf Geographie Europa's, specieller Deutschlands. Kartenzeichnen. 3 St. Dr. Hintz.

Geschichte. Eintheilung in Perioden, und Hauptfacta der alten Geschichte bis zum Untergange des weströmischen Reichs. Häufige Wiederholung des Vorgetragnen. 3 St. Dr. Hintz.

Naturgeschichte. Garten- Feld- und Waldgewächse. — Einzelne Arten der Vögel und Fische. 2 St. Oberlehrer Skusa.

Zeichnen. 2 St. Hr. Breysig.

Schreiben. 3 St. Hr. Waage.

IN QUARTA.

Ordinarius Oberlehrer Dr. Lehmann.

Deutsch. Grammatik; besonders Syntax; — Anfang des Satz- und Periodenbaus. Declamation und Uebung in eigenen Vorträgen. 3 St. Dr. Lehmann; — seit Michaelis Hr. Dirlam.

Latein. Schriftliche Exercitia. 1 St. Grammatik, mit mündlichen Uebungen der Syntaxis verbunden. 2 St. Lesung des Ovid und Cornelius Nepos — Auswendiglernen. 3 St. Hr. Dirlam.

Griechisch. Etymologie und einzelne Theile aus der Syntax. Lectüre: Jacobs Elementarbuch 1r u. 2r Cursus in allen drei Abtheilungen. Mit der ersten Abtheilung wurde das erste Buch der Odyssee gelesen. 5 St. Dr. Lehmann.

Religion. Die christliche Pflichtenlehre nach dem ersten Hauptstücke des lutherischen Katechismus. 2 St. Hr. Prediger Alberti.

Mathematik. Bruchrechnungen, Lehre von den entgegengesetzten Grössen, Buchstabenrechnung, Potenzen, Decimalbrüche, Quadratwurzeln, Proportionen. 3 St. Elemente der Geometrie. 2 St. Dr. Lehmann.

Geographie. Einleitung in die mathematische Geographie; Preussische und Oesterreichische Monarchie, Deutschland überhaupt, Italien, Russland, Schweden, Dänemark, England. 3 St. Dr. Lehmann.

Geschichte. Von der Völkerwanderung bis zum Ende des nordischen Krieges. Hr. Dirlam.

Naturgeschichte. Zusammenstellung in- und ausländischer Pflanzen nach natürlichen Familien und dem Linnéischen System. Einleitung in das Thierreich; speciell die Säugethiere. 2 St. Oberlehrer Skusa.

Zeichnen. 2 St. Hr. Breysig.

IN TERTIA.

Ordinarius Professor Dr. Herbst.

Deutsch. Aufsätze und mündliche Uebungen. Einzelne Theile der Grammatik. Seit Michaelis Dr. Lehmann.

Latein. Grammatik und Styl. 4 St. Metrische Uebungen. 1 St. Gelesen Cic. de senectute und ein Theil des Buches de Amicitia. 2 St. Ovid. Metamorph. XIII—XV. Professor Herbst.

Griechisch. Grammatik, nach Buttmann, verbunden mit schriftlichen Uebungen. 2 St. Professor Dr. Pflugk. Lectüre der Odyssee, bis Michaelis. Derselbe; seitdem Dr. Lehmann. Xenoph. anab. 2 St. Derselbe.

Religion. Die Geschichte des Reiches Gottes, nach der heil. Schrift. Die 5 Bücher Mosis, das Buch Hiob, die Bücher der Richter und Josua wurden in den wichtigsten Abschnitten erklärt, und das Vorgetragene ausgearbeitet. Hr. Prediger Alberti.

Mathematik. Potenzen. Decimalbrüche. Buchstabenrechnung. Auflösung algebraischer Aufgaben. Elemente der Epipedometrie. 5 St. Professor Dr. Förstemann.

Physik. Einleitung. Statik. Hydrostatik. Aërostatik. 1 St. Derselbe.

Geographie. Afrika. Asien. Amerika. Australien. 2 St. Hr. Dirlam.

Geschichte. Die erste Hälfte der alten Geschichte. 2 St. Professor Pflugk.

Französisch — seit Michaelis. Formenlehre nach Hirzel. Uebung im Uebersetzen nach Ahn's Lesebuch. 2 St. Hr. Dirlam.

Zeichnen. 2 St. Hr. Breysig.

IN SECUNDA.

Ordinarius Professor Schöler.

Deutsch. Prosaische Aufsätze und metrische Versuche. Declamation. Lesung ausgewählter Stücke aus der neuern Literatur. 2 St. Hr. Dirlam.

Latein. Freie Aufsätze. Extemporalien. Erzählung nach vorhergelesenen Stücken. Erste freie Sprechübungen. 4 St. Professor Schöler. — Lesung von Cicero's Reden. 3 St. bis Michaelis Professor Schöler; seitdem Professor Herbst. — Virgils Aeneis. 2 St. bis Michaelis Hr. Dirlam, seitdem Professor Schöler.

Griechisch. Stylübung. 1 St. Früher Director Schaub, seit Michaelis Professor Schöler. Lesung des Homer — Ilias VI-XII. 3 St. Professor Schöler, — Xenoph. Memorabilia. 3 St. Professor Schöler, seit Michaelis Professor Herbst.

Hebräisch. Grammatik (nach Gesenius) — Leseübung — Vocabellernen. 2 St. Dr. Hintz.

Französisch. Grammatik. Lectüre nach Menzels Handbuch. Syntactische Uebungen. Professor Schöler, seit Michaelis Professor Herbst.

Religion. Ueber die drei Bildungsstufen des religiösen Lebens. 1 St. Dir. Schaub, bis Michaelis.

Mathematik. Fortsetzung der Epipedometrie. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen. Quadratische Gleichungen. Repetitionen. Ebene Trigonometrie. Uebungen in Auflösung geometrischer und algebraischer Aufgaben. Im Sommer 4, im Winter 5 St. Professor Förstemann.

Physik. Wärme. Uebersicht der Chemie. Electricität. Professor Förstemann.

Geschichte. Von Ludwig XIV. Regierungsantritt bis auf Napoleons Verbannung. 2 St. Professor Schöler.

Zeichnen. 2 St. Hr. Breysig.

IN PRIMA.

Ordinarius der Director.

Deutsch. Deutsche Literaturgeschichte von Ulfilas bis Klopstock (nach Koberstein), dabei Lesung ganzer Werke und einzelner Proben aus den wichtigeren älteren Dichtungen. — Prosaische Aufsätze und metrische Uebungen. Vorträge eigener Aufsätze. Controlle der Privatlectüre. — Im letzten Halbjahre Logik. 3 St. Dr. Lehmann.

Latein. Correctur freier Aufsätze und der wöchentlichen Scripta aus Grotefends Materialien — Extemporalien. Sprechübung (1 St.) — 4 St. Professor Pflugk. — Uebungen im freien Vortrage geschichtlicher Nachbildungen, und Vorlesung neuerer stylistischer Meisterwerke, seit Michaelis 2 St. Professor Schöler. Lectüre: Tacitus Annal. III. IV. V. 2 St. Professor Pflugk. — Cicero de oratore Lib. III. 2 St. Director Schaub, bis Michaelis. Terent. Andria et Heautontimor. 1 St. Horatius. 2 St. Professor Herbst.

Griechisch. Schreibübungen. 1 St. Director Schaub, seit Michaelis Prof. Pflugk. Lectüre: Sophocles Oedip. Rex. Director Schaub, seit Michaelis (5 St.) Oedip. Colon.

Professor Schöler. Demosthenes de corona. Director Schaub. Seit Michaelis die Lectüre von Demosth. de Corona beendigt, darauf Plutarchi Vita Bruti bis zur Hälfte. Professor Pflugk.

Hebräisch. Grammatik. Uebung im Uebersetzen (die 16 ersten Kapitel des zweiten Buches Samuelis und einige Psalmen) — Syntax. 2 St. Dr. Hintz.

Französisch. Uebungen im Styl. Conversation über die neuere Geschichte (zum Theil als Repetition des in Secunda Vorgetragenen). 2 St. Professor Schöler.

Religion. Vom Dasein und den Eigenschaften Gottes. 1 St. Director Schaub, bis Michaelis.

Mathematik. Kegelschnitte. Analytische Geometrie. Sphärische Trigonometrie. Repetitionen und Uebungen. Im Sommer 4, im Winter 5 St. Professor Förstemann.

Physik. Wärme. Magnetismus. Electricität. Astronomie. Repetitionen. 2 St. Derselbe.

Geschichte. Die alte Geschichte beendigt. 2 St. Professor Pflugk.

II. Verordnungen der Behörden.

1. Das Königliche Provinzial-Schul-Collegium verordnet unter dem 13. Mai v. J. die Einsendung von Berichten und Vorschlägen der betreffenden Fachlehrer über den historisch-geographischen Unterricht, und über den in der philosophischen Propädeutik, Behufs einer beabsichtigten Westpreussischen Directorenconferenz.

2. Im Auftrage des Königlichen Ministerii empfiehlt das Königl. Prov.-Schul-Collegium Roons Grundzüge der Erd- Völker- und Staatenkunde, mit der Aufforderung, nach Jahresfrist über die Brauchbarkeit dieses Buches zu berichten. (27. October v. J.)

3. Das Königl. Provinzial-Schul-Collegium veranlasst durch eine Ministerial-Verfügung erinnert unter dem 14. Januar c., dass die Verhältnisse derjenigen Schüler, deren Eltern nicht am Orte des Gymnasiums wohnen, auch auf eine zweckmässige Weise häuslich zu beaufsichtigen seien.

III. Chronik.

Als das wichtigste Ereigniss für die Anstalt muss hier voran berichtet werden, dass Herr Director Schaub dieselbe zu Michaelis verliess, um einem höchst ehrenvollen Rufe des Kö-

nigl. Ministeriums nach Königsberg zu folgen, wo derselbe als Regierungs- und Provinzial-Schulrath angestellt wurde. Stets bemüht das Beste unserer Schule in Lehre und Zucht zu fördern, gerade, theilnehmend und freundlich gegen Lehrer und Schüler hat er sich während seiner 6jährigen Wirksamkeit ein dauerndes Andenken bei allen denen gestiftet, welche mit ihm verbunden gelebt. Herzliche Beweise treuer Anhänglichkeit wurden dem Scheidenden von seinen Collegen und seinen Zöglingen zu Theil, alle den innigen Wunsch für sein künftiges Wohlergehen bekräftigend. — Möge Gottes Segen auch unter der neuen Direction, welche gemäss am 1. März vollzogener Wahl Herr Prorector Professor Engelhardt aus Berlin übernehmen wird, die Anstalt beglücken, möge durch einhelliges Wirken unser aller das Gute, welches in ihr schon begründet ist, erhalten, das Mangelhafte, welches jeder menschlichen Einrichtung sich aufdrängt, von ihr entfernt werden.

Die interimistische Verwaltung der Directionsgeschäfte übernahm zu Michaelis nach geschehener Uebertragung durch einen Hochedeln Rath der Verfasser dieser Anzeigen, welcher in Gemeinschaft mit den Herrn Lehrern der obern Klassen zugleich die Lectionen des abgegangenen Directors und vier dem Herrn Professor Pflugk wöchentlich zufallende Lehrstunden vicarirte. Möge die Gesundheit dieses letztern von uns allen werthgeschätzten Collegen sich in der jetzt eingetretenen glücklichen Kräftigung erhalten, damit wir uns zu doppeltem Danke gegen das Königliche Ministerium vereinigen, welches durch seine liberale Unterstützung die vorjährige Reise möglich machte, welcher unser Freund zu seiner Wiederherstellung so viel schuldig geworden.

Herr Dirlam, ein Zögling des Herrn Professor Passow in Breslau absolvirte zu Michaelis an unserer Anstalt sein Probejahr, und verwaltete seitdem die 1831 zu Ostern vacant gewordene zweite Oberlehrer-Stelle. Pflichttreue, gründliche Kenntnisse seiner Lehrfächer, und unermüdliches Streben nach Fortbildung in seinem Berufe hat er nach dem Zeugnisse des abgegangenen Directors wie des ganzen Lehrercollegiums unter den schwierigsten äussern Umständen aufs deutlichste bewährt. — Der Religions-Unterricht in Tertia und Quarta wurde durch einen Hochedeln Rath zu Michaelis dem Herrn Prediger Alberti übertragen, und dem Herrn Schulamtscandidaten Hasse gestattet, wöchentlich 5 Stunden in Quinta und Sexta arithmetischen und lateinischen Sprachunterricht zu ertheilen.

Mit schuldigem Danke erwähnen wir des ansehnlichen Geldgeschenkes, welches Herr Carl Benjamin Richter bei dem am 5. December erfolgten Tode seines geliebten Sohnes Friedrich Ferdinand, unseres Schülers, der Anstalt zu übermachen die Güte hatte. Um das Andenken des Hingeschiedenen dauernd zu erhalten, hat das Lehrercollegium beschlossen, für die überreichte Summe in der dritten Klasse, deren Mitglied der Verstorbene war, eine Unterstützungsbibliothek von Schulbüchern für arme Schüler zu stiften.

Ausser dem eben genannten hatte die Schule noch zwei ihrer Schüler zu betrauern: den 20. September v. J. starb der Secundaner Karl Heinrich Rudolph Strack aus Danzig, den 19. März d. J. der Quartaner Johann Jezierski aus Nestempohl — beide gute, ihren Lehrern dankbar ergebene Jünglinge.

Eine Hauptschwierigkeit, welche der Einführung des Gesangunterrichts im Wege stand, ist durch einen Vorschlag der interimistischen Direction gehoben worden. So steht auch zu hoffen, dass nach deren von Seiten des Collegiums genehmigten Vorkehrung der androhenden Ueberfüllung von Quarta und Tertia vorgebeugt werde. — So gut auch das jetzige Gymnasiumslocal zur einstweiligen Aushülfe sein mag, so ist doch die Verzögerung, die der Bau eines ordentlichen Gymnasiums erleidet, in so fern sehr zu beklagen, als nun seit 1827 keine gemeinschaftliche Andacht unseres ganzen Cötus mehr Statt findet, und die Beaufsichtigung der in der Erholungspause aus den Lehrzimmern entlassenen Schüler der unteren Klassen durch die vielen Winkel des Gebäudes sehr erschwert, ja fast unmöglich ist.

Den 26. März hielt der Herr Geheime Regierungsrath Jachmann aus Königsberg, welcher nach vollzogenem Abiturientenexamen auch das öffentliche Schulexamen mit seiner Anwesenheit beehren wird, eine Revision des Gymnasiums.

IV. Statistische Nachrichten.

a, Schüler.

Die Gesammtzahl der Schüler in allen 6 Klassen betrug am Schlusse des vorigen Schuljahres 269, jetzt, nach Abzug der Abiturienten und mit Ausschluss der bereits für das nächste Schuljahr Aufgenommenen 298, wovon 12 in Prima, 25 in Secunda, 57 in Tertia, 81 in Quarta, 67 in Quinta, 56 in Sexta sich befinden. Die Schülerzahl der einzelnen Klassen wird sich durch die bevorstehende Versetzung anders gestalten.

Zur Universität werden jetzt Folgende entlassen mit dem Zeugniss der Reife Nro. II.

1. Karl Heinrich Silber aus Elbing, 19 Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird in Berlin Theologie und Philologie studiren.

2. Friedrich Gotthilf Adolph Mundt aus Danzig, 23 Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird in Bonn Theologie studiren.

3. Heinrich Friedberg aus Märkisch-Friedland, 19 Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird in Berlin Cameralia studiren.

4. Karl Hermann Konopacki aus Danzig, 21 Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird in Bonn Cameralia und Jura studiren.

5. Karl Robert Struvy aus Danzig, 21 Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird in Bonn Jura und Cameralia studiren.

6. Gustav Moritz Braunschweig aus Danzig, 21 Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird in Bonn Jura studiren.

7. Hermann Adalbert Franz von Schmidt geb. in Cammin in Pommern, 20 Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird zu Berlin Jura und Cameralia studiren.

8. Ernst Louis Scheffler aus Gotteswalde, 19½ Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird in Berlin Theologie und Philologie studiren.

Mit dem Zeugniss Nro. III.

9. Ludwig Karl Hellwich, geb. zu Graudenz, 23 Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird in Berlin Theologie studiren.

10. August Eduard Klein aus Danzig, 22 Jahr alt, 2 Jahr in Prima. Er wird in Halle Theologie studiren.

11. Gustav Naumann aus Wossitz, 22 Jahr alt, 1 Jahr in Prima. Er wird in Halle Theologie studiren.

12. Karl Friedrich August Wittcke aus Rummelsburg, 21 Jahr alt, 1 Jahr in Prima. Er wird in Berlin Cameralia studiren.

13. Moritz Brachvogel, geb. zu Cammin bei Conitz, 17½ Jahr alt, 1 Jahr in Prima. Er wird in Berlin Medicin studiren.

Die Elementarclasse zählt jetzt 38 Schüler.

---

b, Lehrapparat.

Die Schulbibliothek ist auch in diesem Jahre durch Ankauf werthvoller Werke im Fache der Philologie, der Geschichte, Mathematik und Physik beträchtlich erweitert worden. Wir enthalten uns einer umständlichern Anführung, und berichten nur, dass vor Kurzem auch eine französische Bibliothek zum Behuf der Privatlectüre der obern Klassen angeschafft worden (Werke von Chateaubriand, Daru, Salvandy, Ségur, Delavigne, Jouy, Victor Hugo u. s. w.) — Auch wurde zur ersten Veranschaulichung antiker Kunst in Berlin ein kleines Cabinet von Gemmenabgüssen bestellt.

Von einem Hohen Königlichen Ministerium erhielten wir ausser der Fortsetzung einiger früheren übersandten werthvollen Werke: Wilken's Ausgabe von Mirchondi historia Gaznevidarum, und Herr Karl Benjamin Richter allhier überliess unserer Anstalt nach dem Tode seines Sohnes dessen Schulbücher, welche aus 20 höchst brauchbaren Werken besteht.

Für diese Beweise edler Berücksichtigung eines auf lange Zeit hinaus zur Bildung der hiesigen Jugend nützlichen Instituts sagen wir hier öffentlich unsern innigsten Dank.

---

c, Unterstützungen der Schüler.

Die Unterstützungen aus den von uns verwalteten Stiftungen betrugen 275 Rthlr.

Freien Unterricht erhielten 36 Schüler.

V. Anordnung der Prüfung.

Vormittag von 9 Uhr ab.

QUARTA.

Religion. Herr Prediger Alberti.

Latein. Herr Oberlehrer Dirlam.

QUINTA.

Deutsch. Herr Dr. Hintz.

Latein. Derselbe.

SEXTA.

Latein. Herr Oberlehrer Skusa.

Rechnen. Herr Schulamtscandidat Hasse.

TERTIA.

Geographie. Herr Oberlehrer Dirlam.

Griechisch. Herr Dr. Lehmann.

Nachmittag von 3 Uhr ab.

SECUNDA.

Griechisch. Herr Professor Dr. Herbst.

Mathematik. Herr Professor Dr. Förstemann.

PRIMA.

Latein. Herr Professor Dr. Herbst.

Griechisch. Herr Professor Dr. Pflugk.

Entlassung der Abiturienten. Schöler.

Valediction eines Abiturienten.

Schlussgesang: Nun danket alle Gott &c.

Sonnabend den 30. März ist Censur und Translocation.

Der Anfang des neuen Cursus ist vorläufig auf den 22. April festgesetzt.

Uebersicht

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums im Schuljahre von Ostern 1832 bis 1833.

Allgemeiner Lehrplan.

Fächer.	Classen und Stunden. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
Lateinisch	9	9	7	7	7	7	46
Griechisch	9	7	6	5	—	—	27
Deutsch	3	2	2	3	6	6	22
Französisch	2	2	2	—	—	—	6
Hebräisch	2	2	—	—	—	—	4
Religion	1	1	2	2	2	2	10
Mathematik	5	5	5	5	4	5	29
Physik	2	2	1	—	—	—	5
Geschichte	2	2	2	2	3	—	11
Geographie	—	—	2	3	3	3	11
Naturgeschichte	—	—	—	2	2	2	6
Zeichnen	2∾2		2	2	2	2	12
Calligraphie	—	—	—	—	3	3	6
Summa	37	34	31	31	32	30	195

Verhältnisse der Schüler

In	waren	wurden aufgenommen als Translocirte, oder neue.	entlassen in eine andere Classe, oder von der Anstalt.	sind
I.	11	14	13	12
II.	27	19	21	25
III.	44	40	27	57
IV.	70	57	46	81
V.	62	47	42	67
VI.	55	42	41	56
S.	269	219	190	298

Verhältnisse der Abiturienten.

Es sind entlassen		studiren wo?		was?	
mit N. II.	8	in Berlin.	7	Theologie (u. Philolog.)	6
- - III.	5	in Bonn.	4	Jura (u. Cameralia)	6
		in Halle.	2	Medicin	1
	13		13		13

Das Zeichen ∾ deutet Combination an.

Beiträge

zu

einer einfachen elementaren Behandlung

der

Lehre von den Kegelschnitten

nach geometrischer Methode.

Von

W. A. FÖRSTEMANN,

Professor am Gymnasium zu Danzig.

Mit zwei Figurentafeln.

Danzig,

in Commission bei S. Anhuth.

1833.

Einleitung.

In dem Programme, welches von mir vor zwei Jahren verfasst wurde, bemühete ich mich, einen kleinen Beitrag zur Behandlung der Lehre von den Linien der zweiten Ordnung nach der analytischen Methode zu geben, indem ich die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen nicht bloss, wie es sonst meistens nur geschiehet, auf ein rechtwinkliges, sondern ganz allgemein auf ein Coordinatensystem von beliebigem Winkel bezog, und indem ich versuchte, auf möglich einfachstem Wege die Bedingungen aufzufinden, unter denen diese Gleichung eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel darstellt, so wie aus derselben Gleichung die Werthe der wichtigsten Grössen zu entwickeln, welche dienen, diese Curven nach Lage und Grösse zu bestimmen. In der Einleitung äusserte ich mich in ein Paar Worten über die Wichtigkeit der Lehre von den Kegelschnitten für den Gymnasialunterricht, und legte einige Gründe dar, welche mich bestimmen, im Allgemeinen der analytischen Methode vor der rein geometrischen in Bezug auf den Elementarunterricht in diesem Gegenstande den Vorzug zu geben. Doch empfahl ich, der rechnenden Behandlung der Kegelschnittstheorie eine, wenn auch nur kurze, Darstellung und Betrachtung derselben nach geometrischer Methode voranzuschicken. Wider Erwarten, aber nicht unerwünscht, bietet sich mir jetzt schon wieder die Gelegenheit zur Abfassung einer ähnlichen

kleinen Schrift dar, und ich glaube, diese Gelegenheit nicht besser benutzen zu können, als indem ich jetzt einige Beiträge zu einer solchen geometrischen Behandlung der Kegelschnittslehre zu geben versuche. Meine Hauptabsicht bei meinen Untersuchungen über diesen Gegenstand ging nur dahin, die Lehre von den Kegelschnitten in eine nähere Verbindung mit den niedriger stehenden Elementen der Geometrie zu setzen, und den ersten Unterricht in derselben zu erleichtern; keineswegs beabsichtigte ich, die grosse Menge der interessanten Eigenschaften jener überaus wichtigen Curven in ein vollständiges System zu bringen. Einige meiner wichtigsten Resultate, welche mir vorzüglich Beachtung beim Unterrichte zu verdienen schienen, habe ich nun in den folgenden Blättern dargelegt, bin jedoch weit davon entfernt, Alles oder auch nur die Hälfte als mein Eigenthum angesehen wissen zu wollen; viel Bekanntes musste ich des Zusammenhangs oder seiner Wichtigkeit wegen mit aufnehmen. Jedem Lehrer muss nun anheim gestellt bleiben, ob und in wie weit er das hier Mitgetheilte bei seinem Unterrichte benutzen kann und will. Diese Bemerkungen hielt ich für nothwendig, um den Leser im Voraus auf den Standpunkt zu stellen, aus welchem ich diese Blätter beurtheilt zu sehen wünsche.

I.

Betrachtung der Schnittlinien, welche in Kegelflächen entstehen, wenn diese durch ebene Flächen geschnitten werden.

---

§. 1.

Zwei unbegrenzte gerade Linien XX′ und YY′ mögen einander in einem Punkte Z schneiden, und sodann mögen sich die beiden Scheitelwinkelflächen XZY und X′ZY′ um die Linie XX′ im Raume einmal ganz herumdrehen, so wird jeder der beiden Theile von YY′, nämlich sowohl ZY als ZY′, eine ins Unendliche sich erstreckende Kegelfläche beschreiben. Diese beiden Kegelflächen werden nur den Punkt Z gemein haben, und von demselben aus entgegengesetzt liegen; der Inbegriff derselben kann eine Doppelkegelfläche genannt werden. Es soll untersucht werden, welche Schnittlinie eine solche Doppelkegelfläche mit einer ebenen Fläche hervorbringe. Fig. 1 u. 3.

Die Linie XX′ heisst die Axe der Kegelflächen, der Punkt Z die Spitze derselben. Wird durch diese Spitze und irgend einen Punkt einer der Kegelflächen eine unbegrenzte gerade Linie gelegt, so liegt dieselbe ganz in der Doppelkegelfläche, und stellt eine der Lagen dar, in welcher der Schenkel YY′ in einem Augenblicke sich befand, als er durch seine Umdrehung die Doppelkegelfläche hervorbrachte. Eine solche gerade Linie soll eine Seitenlinie der Doppelkegelfläche heissen.

§. 2.

Wir betrachten nun kürzlich die Lage einer ebenen Fläche gegen die Doppelkegelfläche, wenn jene Ebene mit dem Kegel den Punkt Z gemein hat. Hier erhellt, dass es dreierlei Lagen der Ebene gegen die Doppelfläche giebt, nämlich:

1) Lagen, in welchen die Ebene mit der Doppelkegelfläche nur den einzigen Punkt Z gemein hat. Eine gerade Linie in einer solchen Ebene hat entweder keinen Punkt mit der Doppelkegelfläche gemein, oder nur den einzigen Punkt Z.

2) Lagen, in welchen die Ebene mit der Doppelkegelfläche nur eine einzige Seitenlinie gemein hat, in welcher sie dieselbe berührt. Soll eine Ebene die Kegelflächen in einer gegebenen Seitenlinie berühren, so muss die Ebene rechtwinklig gegen diejenige Ebene

sein, welche diese Seitenlinie und auch die Axe XX′ in sich enthält. Wird in einer solchen Berührungsebene eine unbegrenzte gerade Linie gezogen, so ist dieselbe entweder einerlei mit der Seitenlinie, in welcher die Berührung Statt findet, und hat dann alle ihre Punkte mit den Kegelflächen gemein; oder sie ist jener Seitenlinie parallel, und hat keinen Punkt mit den Kegelflächen gemein; oder sie schneidet jene Seitenlinie in einem Punkte, und dann ist dieses der einzige Punkt, den die Gerade mit der Doppelkegelfläche gemein hat, und in dem beide einander berühren.

3) Endlich giebt es Lagen, bei denen die Ebene zwei Seitenlinien mit den Kegelflächen gemein hat, in welchen sie dieselben schneidet. (Mehr als zwei Seitenlinien kann keine Ebene mit der Doppelkegelfläche gemein haben). Wird in einer Ebene dieser Art eine gerade Linie gezogen, so ist dieselbe entweder der einen der beiden Seitenlinien parallel; dann wird die andre Seitenlinie von ihr in einem Punkte, und in eben diesem Punkte auch die Doppelkegelfläche geschnitten, weiter hat aber diese Gerade keinen Punkt mit der Doppelkegelfläche gemein; — oder sie ist keiner der Seitenlinien parallel, gehet aber nicht durch Z; dann wird jede der beiden Seitenlinien von der Geraden in einem Punkte getroffen, und daher giebt auch die Gerade mit der Doppelkegelfläche diese beiden Schnittpunkte, sonst aber keinen weiter; — oder, die gerade Linie ist einerlei mit einer der Seitenlinien, wo sie alle ihre Punkte in den Kegelflächen hat; — oder endlich, sie ist keine Seitenlinie, gehet jedoch durch Z hindurch, wo sie bloss diesen Punkt mit den Kegelflächen gemein hat.

Keine Gerade hat mehr als zwei Punkte mit einer Doppelkegelfläche gemein, ausgenommen wenn dieselbe eine Seitenlinie ist, also ganz in der Doppelkegelfläche enthalten ist.

§. 3.

Wird nun mit der Doppelkegelfläche eine Ebene verbunden, die nicht durch die Spitze Z gehet, so lege man durch die Spitze Z eine Ebene, welche jener parallel ist, dann kann man in Bezug auf diese Hülfsebene die drei in §. 2. erwähnten Fälle unterscheiden, und wird diese Fälle auch von Wichtigkeit für die Lage der Hauptebene finden. Nämlich:

1) Hat die Hülfsebene bloss den Punkt Z mit den Kegelflächen gemein, so wird jede auf der Doppelkegelfläche mögliche Seitenlinie die Hauptebene treffen, und daher die Schnittlinie der Doppelkegelfläche mit der Hauptebene eine zusammenhängende Linie sein. Diese Schnittlinie wird aber die Eigenschaft haben, mit keiner Geraden mehr als 2 Schnittpunkte geben zu können, und daher wird sie eine Curve sein.

2) Hat die Hülfsebene mit der Doppelkegelfläche eine Seitenlinie gemein, und berührt dieselbe, so trifft die Hauptebene nur eine der beiden Kegelflächen, und bildet darin ebenfalls eine Curve, die sich aber nicht schliesst, (wie man daraus siehet, dass die Hauptebene

keinen Punkt mit jener Seitenlinie gemein hat, weil sie ihr parallel ist), sondern zwei sich ins Unendliche erstreckende Schenkel hat.

3) Hat endlich die Hülfsebene mit der Doppelkegelfläche zwei Seitenlinien gemein, so trifft die Hauptebene jede der beiden entgegengesetzten Kegelflächen in einer Curve, aber jede dieser Curven ist keine geschlossene, sondern hat zwei sich ins Unendlich erstreckende Schenkel.

§. 4.

Es werde nun der erste dieser Fälle betrachtet, in welchem die Hülfsebene, welche durch Z gelegt ist, ausser Z keinen Punkt mit der Doppelkegelfläche gemein hat, und wo die Hauptebene, — die wir auch die Curvenebene nennen können, — eine zusammenhängende Curve als Schnittlinie hervorbringt. Fig. 1.

Hier giebt es eine Ebene, welche die Axe der Kegelflächen, XX′, in sich enthält, und zugleich auf der Curvenebene lothrecht ist. Um dieselbe zu finden, fälle man ein Loth aus Z auf die Curvenebene, und lege eine Ebene durch dieses Loth und die Axe XX′, so ist diese Ebene die gesuchte. — Nur der Fall, wo das aus Z auf die Curvenebene gefällte Loth mit XX′ zusammenfällt, bildet eine Ausnahme; hier ist jede XX′ enthaltende Ebene auf der Curvenebene lothrecht, und offenbar die Curve ein Kreis. Wir haben nicht nöthig, auf diesen Fall weiter Rücksicht zu nehmen. — Nun ist zu bemerken, dass die durch XX′ lothrecht gegen die Curvenebene gelegte Ebene mit dieser Curvenebene eine gerade Schnittlinie AA′ geben wird, welche man die Axe der Curve nennt, und dass die Curve durch diese Axe in völliger Symmetrie in zwei einander congruente Hälften getheilt werden wird.

Es hat sich nun durch diese durch XX′ gelegte Ebene ein Dreieck ZAA′ gebildet, dessen Seiten sind die Axe der Curve AA′ und zwei Seitenlinien ZA, ZA′. Die Betrachtung dieses Dreiecks ist von Wichtigkeit. Die unbegrenzte Ebene desselben, — die vorhin angewandte Hülfsebene, — wollen wir die Dreiecksebene nennen.

§. 5.

Man beschreibe in dieser Dreiecksebene zwei Kreise, den einen mit dem Centrum M, so dass er alle Seiten des Dreiecks berühre, und zwar die ZA in B, die ZA′ in C, die AA′ in F; den zweiten, grössern Kreis mit dem Centrum M′ aber so, dass er AA′ in F′, und von den Seiten ZA, ZA′ die Verlängerungen in B′ und C′ berühre. Die Mittelpunkte M und M′ werden in der Axe XX′ liegen.

Nach bekannten Sätzen der ebenen Geometrie hat man nun

$$ZB = ZC, \qquad ZB' = ZC',$$
$$AB = AF = A'F' = A'C', \qquad AB' = AF' = A'F = A'C,$$
$$AA' = BB' = CC'.$$

Jetzt ziehe man die geraden Linien BC und B'C'. Diese werden einander parallel sein, und die Axe XX' unter rechten Winkeln in zwei Punkten L und L' schneiden, und ihre Verlängerungen werden mit den Verlängerungen von AA' in zwei Punkten D und D' zusammentreffen. Aus A und A' fälle man die Lothe AE und A'E' auf BD und B'D', dann wird man haben

$$\triangle ABE \cong A'C'E', \qquad \text{folglich} \quad AE = A'E',$$
dann
$$\triangle AED \cong A'E'D', \qquad \text{also} \quad AD = A'D'.$$

Nun werden ferner die Dreiecke ABD und AB'D', eben so die Dreiecke A'C'D' und A'CD einander ähnlich sein. Theils wegen des einen oder des andern Paares dieser ähnlichen Dreiecke, theils wegen gleich langer Linien wird man nun folgende gleiche Verhältnisse finden:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AB}{AD} \left\{ \begin{array}{l} = \dfrac{AB'}{AD'} = \dfrac{AF'}{AD'} \\ \text{oder} = \dfrac{A'C'}{A'D'} = \dfrac{A'C}{A'D} \end{array} \right\} = \frac{A'F}{A'D}.$$

Daher ist auch
$$AF \,.\, A'D = A'F \,.\, AD,$$
und auf ähnliche Art
$$A'F' \,.\, AD' = AF' \,.\, A'D'.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, die Punkte A', F, A, D seien **harmonische** (harmonisch liegende) Punkte, oder, was dasselbe sagt, die Linie A'D sei in F und A harmonisch getheilt (oder auch, nach einer wohl besseren Terminologie, welche z. B. **Poncelet** in **Crelle's** *Journal der Math.* Band III. S. 221. anwendet: Die Linie AA' sei in F und D, oder die Linie FD in A und A' harmonisch getheilt). Die letzte Gleichung zeigt ganz dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die Punkte A, F', A' und D'.

§. 6.

Man denke jetzt wieder die Kegelfläche sammt der Curvenebene, zugleich aber auch zwei Kugeln, die eine mit dem Centrum M und dem Radius = MB = MC = MF, die andre mit dem Centrum M' und dem Radius = M'B' = M'C' = M'F'. Die erste und kleinere dieser Kugeln wird mit der Kegelfläche nicht bloss die Punkte B und C, sondern überhaupt eine Kreislinie gemein haben, deren Centrum L, deren Radius = LB = LC, und wird die Kegelfläche in dieser Kreislinie berühren. Ganz auf dieselbe Art wird die zweite,

grössere Kugel die Kegelfläche in einer Kreislinie berühren, deren Centrum L′ und deren Radius = L′B′ = L′C′. Diese beiden Kreislinien mögen die Berührungskreise, und die Ebenen, in denen dieselben liegen, und welche gegen die Axe der Kegelfläche in L und L′ rechtwinklig sind, mögen die Ebenen der Berührungskreise oder kürzer die Berührungsebenen heissen.

Nun erhellt, der Punkt F werde ein Berührungspunkt der Curvenebene und der Oberfläche der kleineren Kugel sein; denn die Dreiecksebene, in welcher der Kugelradius MF liegt, ist senkrecht gegen die Curvenebene, MF aber senkrecht auf der Schnittlinie AA′ beider Ebenen, mithin auch senkrecht auf der Curvenebene selbst. Auf gleiche Weise ist auch F′ ein Berührungspunkt der Curvenebene und der grösseren Kugel.

Man erweitere jetzt die Ebenen der Berührungskreise, bis die Curvenebene von der einen GHIK in der Geraden GH, von der andern, G′H′I′K′ in G′H′ geschnitten wird. Da sowohl die Curvenebene als jede der beiden Ebenen der Berührungskreise rechtwinklig gegen die erweitert zu denkende Dreiecksebene ist, so werden auch die Schnittlinien GH und G′H′ auf eben dieser Ebene ZAA′ lothrecht sein.

§. 7.

Nun sei P irgend ein Punkt der Curve, und ZQPQ′ sei die zugehörige Seitenlinie der Kegelfläche. Diese Seitenlinie wird zwei Punkte, Q und Q′, mit den Berührungskreisen gemein haben, und offenbar werden die beiden Kugeln von dieser Seitenlinie ZQPQ′ berührt werden, die eine in Q, die andre in Q′. Dabei wird man haben

$$QQ' = BB' = CC' = AA'.$$

Man ziehe jetzt in der Curvenebene die beiden geraden Linien PF und PF′, so werden auch diese die Kugeln, beziehungsweise in F und F′, berühren. Nun gilt der Satz: Werden aus einem Punkte, der ausserhalb einer Kugel liegt, an diese zwei Berührungslinien gezogen, so sind diese Berührungslinien, in so fern sie von jenem Punkte und den beiden Berührungspunkten begrenzt werden, von gleicher Länge. Vermöge dieses Satzes hat man nun

$$PF = PQ, \quad \text{und } PF' = PQ',$$

daher auch

$$PF + PF' = PQ + PQ' = QQ',$$ Fig. 1 u. 2.

oder

$$PF + PF' = AA'.$$

Dieses giebt uns den Satz:

> Werden die in der Curvenaxe liegenden Punkte F und F′ mit irgend einem Punkte der Curve verbunden, so ist die Summe der beiden Verbindungslinien constant, und zwar immer der Axe der Curve gleich.

Wir betrachten dieses als die **erste** hier von uns gefundne **Haupteigenschaft** unsrer Curve. Wird von einer Ellipse die Definition gegeben: „Eine Ellipse ist der geometrische Ort des Punktes in einer Ebene, der mit zwei in derselben Ebene enthaltenen festen Punkten zwei Entfernungen bildet, deren Summe einer constanten Linie gleich ist" — so sehen wir, unsre Curve sei eine **Ellipse**. Die Punkte F, F′ sind die **Brennpunkte** der Ellipse, die Linien PF und PF′ sind die **Brennstrahlen, radii vectores** des Punktes P.

§. 8.

Fig. 1. Man nehme nun eine Ebene an, welche die Kegelfläche in der Seitenlinie ZQPQ′ und also auch die Kugeln in Q und Q″ berühre. Diese berührende Ebene schneide nun die Curvenebene in der geraden Linie RPR′, so wird diese Gerade, eben so wie die berührende Ebene selbst, nur den einzigen Punkt P mit der Curve gemein haben. Eine andre in der Curvenebene durch P gezogene Gerade würde ausser P noch einen zweiten Punkt mit der Curve gemein haben; denn diejenige Ebene, welche diese andre durch P gezogene Gerade und auch die Seitenlinie ZP in sich enthielte, würde die Kegelfläche ausser in ZP noch in einer zweiten Seitenlinie schneiden, diese zweite Schnittlinie würde auch mit der Curve einen Punkt gemein haben, und dieser Punkt würde zugleich der zweite Punkt sein, in welchem die Curve von der andern durch P gezogenen Geraden geschnitten würde. Die Linie RPR′ wird also die einzige in der Curvenebene durch P mögliche Gerade sein, welche nur diesen Punkt P mit der Curve gemein hat, sie wird die **Berührende** der Curve am Punkte P sein.

Das Folgende recht verständlich zu machen, wollen wir einen stereometrischen Satz aussprechen, und sodann auf unsern Gegenstand beziehen. Es ist dieser: Legt man an eine Kugel zwei berührende Ebenen, die einander nicht parallel sind, und ziehet aus einem beliebigen Punkte der Schnittlinie dieser Ebenen zwei Verbindungslinien zu den beiden Berührungspunkten, so bildet jene Schnittlinie mit der einen Verbindungslinie einen eben so grossen Winkel, wie mit der andern. Den Beweis dieses Satzes wollen wir mit seiner Anwendung auf die kleinere Kugel, die Curvenebene und die durch ZP und RR′ hindurchgehende berührende Ebene vereinigen, jedoch so, dass einige Hülfsconstructionen der Phantasie des Lesers überlassen bleiben. Man lege durch das Centrum M und die Berührungspunkte F und Q eine Ebene; der Schnittpunkt dieser Ebene mit RR′ heisse U, und man ziehe MU. Dann wird diese Hülfsebene MFQU gegen RR′ lothrecht sein (denn die Hülfsebene enthält die auf der Curvenebene und der berührenden Ebene beziehungsweise lothrechten Radien MF, MQ, ist also lothrecht gegen diese beiden Ebenen, und mithin auch lothrecht gegen deren Schnittlinie RR′). Ferner wird sein $\triangle$ MFU $\cong$ MQU, daher UQ $=$ UF. Ziehet man

nun aus einem beliebigen Punkte der RR′, es sei P, die beiden Geraden PF, PQ, so wird sein △ PUF ≅ PUQ, und also ∠ FPU = QPU. Hiefür können wir schreiben

$$\angle FPR = QPR.$$

Durch Anwendung desselben Satzes auf dieselben zwei Ebenen, aber die grössere Kugel, ist

$$\angle F'PR' = Q'PR'.$$

Nun sind aber die Winkel QPR und Q′PR′ als Scheitelwinkel einander gleich, folglich auch

$$\angle FPR = F'PR'.$$

So bildet also die Gerade, welche in der Curvenebene liegt, und die Curve in einem ihrer Punkte berührt, mit den beiden Brennstrahlen, die zu dem Berührungspunkte gezogen worden, gleich grosse Winkel. Dieses erlaubt offenbar auch folgende Umkehrung: Ziehet man für einen Punkt P der Curve die Brennstrahlen FP und F′P, dann in der Curvenebene durch P eine Gerade RPR′, welche mit jenen Brennstrahlen die gleichen Winkel FPR und F′PR′ bildet (oder welche gegen die Halbirungslinie des Winkels FPF′ lothrecht ist), so ist diese Linie RR′ eine Berührende für den Punkt P; jede andre durch P in der Curvenebene gezogene unbegrenzte Gerade schneidet die Curve ausser in P noch in einem zweiten Punkte.

Wir betrachten das hier Gefundne als die zweite Haupteigenschaft der Curve.

§. 9.

Man denke jetzt durch P eine gerade Linie parallel mit der Kegelaxe gelegt, so wird diese Linie die Berührungsebene GHIK unter rechten Winkeln in einem Punkte V treffen. Nun ziehe man in der Curvenebene durch P parallel mit der Curvenaxe AA′ die Gerade SS′, welche GH in S und G′H′ in S′ treffe. Dann werden die Dreiecke PVQ und AEB einander ähnlich sein, eben so die Dreiecke PVS und AED. Daher können wir schliessen Fig. 1. u. 2.

$$\frac{PV}{AE} = \frac{PQ}{AB} \text{ und auch } \frac{PV}{AE} = \frac{PS}{AD},$$

woher auch

$$PQ : PS = AB : AD.$$

Indem wir statt PQ die gleiche Linie PF, statt AB die gleiche AF setzen, haben wir also

$$PF : PS = AF : AD,$$

wo wir (s. §. 5.) statt AF : AD auch setzen dürfen A′F′ : A′D′ oder AF′ : AD′ oder A′F : A′D.

Auf analoge Weise lässt sich auch zeigen, dass

$$PF' : PS' = AF : AD \; (= AF' : AD' \text{ u. s. w.}).$$

Die Linien GH und G′H′ haben also eine merkwürdige Eigenschaft, nämlich die, dass die Abstände eines Punktes P der Curve von dem Brennpunkte F und von der Linie GH, so wie auch die Abstände desselben Punktes von dem andern Brennpunkte F′ und der zugehörigen Linie G′H′ ein constantes Verhältniss haben, der Punkt P liege in der Curve, wo er wolle. Dabei ist zu bemerken, dass die constante Zahl PF : PS = PF′ : PS′ klei-

ner als 1 ist, indem man aus dem Dreiecke $A'C'D'$ siehet, dass $A'C'$ oder AF kleiner ist als $A'D'$ oder AD. Die Linien GH und $G'H'$ kann man aber die Richtlinien, Leitlinien, *directrices* der Ellipse nennen, da ihre Eigenschaft derjenigen der bekannten Directrix der Parabel analog ist.

Wir sehen das hier Gefundne als die dritte Haupteigenschaft unsrer Curve an.

§. 10.

Die Beschaffenheit der Kegelfläche und die Lage der schneidenden Curvenebene gegen dieselbe können durch Angabe der Seiten des Dreiecks ZAA' bestimmt werden, und bestimmen ihrerseits wieder die Beschaffenheit der Ellipse. Es kann daher verlangt werden, aus den bekannten Seiten jenes Dreiecks die Länge der wichtigsten Linien, welche bei einer Ellipse zu bemerken sind, herzuleiten.

Es werde gesetzt

$$S = \frac{AA' + ZA + ZA'}{2} = \text{dem halben Umfange des } \triangle\, ZAA',$$

so hat man, zu Folge der Sätze über den eingeschriebenen Kreis und die aussen-eingeschriebenen Kreise an einem Dreiecke:

$$AF = A'F' = S - ZA' = \frac{AA' + ZA - ZA'}{2}.$$

Für die Entfernung der beiden Brennpunkte von einander findet man daher

$$FF' = AA' - 2\,(S - ZA') = ZA' - ZA.$$

Würde $ZA = ZA'$ angenommen, so würde FF' den Werth 0 erhalten, die Brennpunkte würden zusammenfallen, die Ellipse würde ein Kreis werden.

Die halbe kleine Axe der Ellipse wird durch $\sqrt{(S - ZA)\,.\,(S - ZA')}$ ausgedrückt.

Zur Berechnung der Linie AD dient die Gleichung aus §. 5. $AF\,.\,A'D = A'F\,.\,AD$. Man hat aus derselben

$$(S - ZA')\,.\,(AA' + AD) = (S - ZA)\,.\,AD,$$

woraus sich entwickelt

$$AD = \frac{(S - ZA')\,.\,AA'}{ZA' - ZA} = \frac{AF\,.\,AA'}{FF'}.$$

Indem man das Doppelte dieses Ausdrucks zu AA' addirt, erhält man den Werth von DD', und findet

$$DD' = \frac{AA'\,.\,(2\,AF + FF')}{FF'} = \frac{AA'^2}{FF'}.$$

Zu einem Zahlenbeispiel sei

$$AA' = 6, \quad ZA = 4, \quad ZA' = 8,$$

dann ist $S = 9, \quad AF = A'F' = 1, \quad FF' = 4.$

Die halbe kleine Axe der Ellipse ist $= \sqrt{5} = 2,236\ldots$

Endlich ist $AD = A'D' = \frac{3}{2}, \quad DD' = 9.$

Nach den in diesen Zahlen gegebenen Verhältnissen sind die Figuren 1 u. 2. construirt. Doch ist die erste Figur nicht durchgreifend nach einer bestimmten Projectionsart gezeichnet, sondern auf eine solche Art, wie sie am meisten ihrem eigentlichen Zwecke zu entsprechen schien, nämlich dem Zwecke, der Phantasie, welche sich das Ganze im Raume vorstellen soll, so gut als möglich vorzuarbeiten, und derselben dies Geschäft zu erleichtern. Die in der Dreiecksebene ZAA′ liegenden Linien sind aber nach den obigen Zahlenverhältnissen gezeichnet.

§. 11.

Jetzt wenden wir uns zu demjenigen Falle in Betreff der Lage der Curvenebene, wo diese einer durch Z gelegten Ebene, welche die Doppelkegelfläche in zwei Seitenlinien schneidet, parallel ist. Hier liegt das Dreieck ZAA′ ganz ausserhalb der Kegelflächen; von den beiden Kugeln mit den Mittelpunkten M und M′ liegt die eine innerhalb der einen, die andre innerhalb der andern Kegelfläche; die beiden Kreise, welche in der Dreiecksebene ZAA′ liegen, und Durchschnitte jener Kugeln darstellen, erscheinen beide als aussen-eingeschriebene Kreise für das Dreieck ZAA′. Fig. 3.

Stellt man nun Betrachtungen an, die denen von §. 5. und §. 10. analog sind, und setzt dabei wieder

$$S = \frac{AA' + ZA + ZA'}{2},$$

so findet man

$$ZB = ZC = S - ZA', \qquad ZB' = ZC' = S - ZA,$$
$$AB = AF = A'C' = A'F' = S - AA',$$
$$A'C = A'F = AB' = AF' = S,$$
$$AA' = BB' = CC',$$
$$FF' = ZA' + ZA.$$

Bestimmt man die Punkte D und D′, dann E und E′ auf ähnliche Weise, wie in §. 5., so hat man auch hier AE = A′E′, AD = A′D′. Dann findet man ganz wie dort

$$AF \,.\, A'D = A'F \,.\, AD \quad \text{und} \quad A'F \,.\, AD' = AF' \,.\, A'D'.$$

Hiernach sind auch hier die Punkte F, A, D, A′ harmonische, und eben so die Punkte F′, A′, D′, A.

Auf analoge Weise wie in §. 10. findet man

$$AD = A'D' = \frac{AF \cdot AA'}{FF'}$$

dann

$$DD' = \frac{AA'^2}{FF'}.$$

Es entstehen nun aber durch unsre Curvenebene eigentlich zwei Curven, eine in der einen Kegelfläche, welche die Kugel, deren Centrum M, einschliesst, und eine in der andern Kegelfläche, in welcher die Kugel mit dem Centrum M′ eingeschlossen ist. Diese beiden Curven sehen wir aber lieber als Zweige einer einzigen Curve an. Nehmen wir nun in dem zuerst angegebenen Zweige einen Punkt P, und leiten aus ihm mittelst einer Seitenlinie ZP der Doppelkegelfläche die Punkte Q und Q′ ganz auf analoge Weise ab, wie in §. 7. geschahe, so werden wir haben:

$$PF = PQ, \quad PF' = PQ', \qquad PF' - PF = QQ' = BB',$$

oder

$$PF' - PF = AA'.$$

Für einen Punkt P im andern Zweige der Curve dagegen würde man haben

$$PF - PF' = AA'.$$

Hienach geben die aus den Punkten F und F′ an einen Punkt der Curve gezogenen Verbindungslinien immer eine constante Differenz. Definirt man nun eine Hyperbel als den geometrischen Ort eines solchen Punktes in einer Ebene, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten derselben Ebene eine constante Differenz geben, so erhellt, die Curve sei in dem jetzt betrachteten Falle eine Hyperbel. Die Linie AA′ ist die Hauptaxe der Hyperbel; die Benennungen Brennpunkte, Brennstrahlen finden ihre bekannte Anwendung auf die Punkte F und F′ und die Linien PF, PF′.

Die hier ermittelte Eigenschaft unsrer Curve ist dem in §. 7. Gefundnen analog. Auch die in §. 8 u. 9. gefundnen beiden Eigenschaften der Ellipse finden hier bei der Hyperbel ihre genau entsprechenden, die auch auf dieselbe Weise, wie jene, bewiesen werden können, nur ist in Bezug auf die dritte Haupteigenschaft zu bemerken, dass hier A′D′ oder AD immer kleiner als A′C′ oder AB, und dass also der Quotient PF : PS, welcher bei der Ellipse kleiner als 1 war, hier grösser als 1 ist.

§. 12.

Endlich betrachten wir den Fall, wo die Curvenebene eine solche Lage hat, dass die mit ihr parallel durch Z gelegte Ebene die Doppelkegelfläche in einer Seitenlinie, es sei ZA′, berührt. Hier ist die Linie AA′ der ZA′ parallel, und unendlich gross, indem A′ in unendlicher Entfernung verschwunden ist. Man kann zwar noch eine Kugel mit dem Centrum M construiren, welche die Linie ZA und die Parallelen ZA′, AA′ berührt, aber die andre Ku-

gel mit dem Centrum M′ ist nicht mehr construirbar; dieses Centrum kann auf gewisse Weise in unendlicher Entfernung von Z in der Axe XX′, und zwar eben so gut in der Hälfte ZX als in der ZX′, und die Kugel selbst kann unendlich gross gedacht werden. Dieser Fall bildet einen Uebergang von dem Falle der Ellipse zu dem der Hyperbel.

Die dritte Haupteigenschaft der Ellipse (§. 9.) findet hier ihre leichte Anwendung. Man kann nämlich auch hier, wie in Fig. 1., die gerade Linie GH bestimmen; dadurch erhält man aber ein gleichschenkliges Dreieck ABD, nämlich AB = AD, daher ist auch jedesmal PF = PS, oder der constanste Quotient $\frac{PF}{PS}$ ist = 1.

Die Curve heisst hier eine Parabel, F der Brennpunkt, GH die Richtlinie, Leitlinie, Directrix.

Die erste Haupteigenschaft der Ellipse (§. 7.) lässt sich, wie es scheint, nicht wohl auf die Parabel anwenden, da hier der Punkt F′ in unendlicher Entfernung liegt. Indessen gewisse Betrachtungen, von andern Grundlagen ausgehend, zeigen, dass hier diese erste Eigenschaft als mit der eben bewiesenen dritten zusammenfallend angesehen werden kann.

Was die zweite Haupteigenschaft der Ellipse (§. 8.) betrifft, so findet dieselbe auch bei der Parabel Statt, wenn man nur, da F′ in unendliche Entfernung gerückt ist, statt der Linie PF′ eine Gerade aus P ziehet, welche der Axe AA′ parallel ist. Denn es ist klar, dass diese Eigenschaft dem Uebergangsfalle zwischen der Ellipse und der Hyperbel nicht fehlen könne, da sie sowohl der Ellipse als der Hyperbel zukommt.

§. 13.

Die Wurzel der ganzen Geometrie ist die Anschauung von Raumgebilden. Freilich ist reingeistige Anschauung durch die Kraft der Phantasie die Hauptsache. Aber diese geistige Anschauung will durch äussere, sinnliche Anschauung von wirklichen Raumgestalten geweckt sein, und selbst einem in der Wissenschaft schon weit vorgerückten Geiste bleibt eine solche sinnliche Anschauung immer noch ein unter Umständen unentbehrliches Hülfsmittel, namentlich, wo es sich um verwickeltere Gebilde handelt. Diese Wahrheiten müssen besonders bei dem Unterrichte in der Stereometrie, dies Wort in seinem weitern Sinne genommen, sehr beachtet werden; es ist in diesem Theile der Geometrie überaus zweckmässig, zum Theil nothwendig, zusammengesetztere oder im Geiste durch Phantasie schwierig zu erzeugende Raumgestalten dem Schüler in Modellen und Apparaten zur wirklichen Anschauung vorzulegen. Es gilt dieses auch in Bezug auf die Entstehung der Kegelschnitte aus dem Kegel. Man begnügt sich aber gewöhnlich, etwa drei Kegel aus Holz verfertigen, und jeden in einer ebenen Fläche zerschneiden zu lassen, so dass der eine eine Ellipse, der andre eine Parabel, der dritte eine Hyperbel, oder eigentlich nur einen Zweig einer Hyper-

bel, darbietet. Aber gewähren auch diese Apparate ohne Zweifel einigen Nutzen, so tragen sie doch unmittelbar höchst wenig zur Begründung und Versinnlichung der Haupteigenschaften der Kegelschnitte bei, namentlich nichts im Betreff derjenigen Eigenschaften, welche oben in den §§. 7. 8 u. 9. für die Ellipse hergeleitet wurden. Es ist aber nicht schwer, einen Apparat anzugeben, welcher die Beweise dieser drei Eigenschaften, wenn auch zunächst nur für die Ellipse, klar vor Augen legt. Die Hauptbestandtheile eines solchen Apparates bilden zwei ungleiche hölzerne Kugeln, ein Messingblech, welches die eine Kugel von der einen, die andre von der andern Seite berührt und die Curvenebene darstellt, dann Messingdrähte zur Darstellung mehrer Seitenlinien (wie ZBB', ZCC', ZQQ'), ferner ein Messingblech zur Darstellung der Ebene $GHIK$, welches an das vorhin genannte Messingblech bei GH angelöthet wird, bis zur kleineren Kugel sich erstreckt, und am besten durchbrochen wird, damit man einige Punkte und Linien der Curvenebene besser sehen könne, endlich wohl noch kleine Messingdrähte oder Bleche zur Darstellung der Linien PV und AE. Von der grösseren Kugel ist übrigens das Segment ganz hinreichend, welches der Spitze des Kegels zugekehrt und in Fig. 1. dargestellt ist. Man kann dasselbe mit einer Unterlage, welche ein rechtwinkliges Parallelepipedum von geringer Dicke bildet, aus einem Stücke arbeiten lassen; in dieser Unterlage kann auch die Linie $G'H'$ dadurch bezeichnet werden, dass man da, wo sie hintrifft, das die Curvenebene darstellende Messingblech mit Schrauben oder Stiften befestigt; auch kann man in der Unterlage einige kleine Vertiefungen dicht an dem das Kugelsegment begrenzenden Kreise, da wo die Punkte B', C', Q' liegen, anbringen, welche die Enden der die Seitenlinien der Kegelfläche darstellenden Drähte aufnehmen. Um dem ganzen Apparate mehr Halt zu geben, kann ein etwas starker Messingdraht die Stelle der Axe ZX vertreten, die kleinere Kugel als Durchmesser durchbohren, und in dem Segmente der grössern Kugel befestigt sein. Um die Messingdrähte, welche Seitenlinien des Kegels darstellen, in der Gegend der Spitze Z fest zusammenzuhalten dient etwa ein metallenes Knöpfchen oder eine kleine runde Platte mit einigen Löchern durchbohrt, durch welche sich die Enden der Drähte hindurchstecken lassen. Freilich bildet sich dadurch kein mathematischer Punkt als Spitze; die Phantasie wird aber diese und die übrigen Unvollkommenheiten des Apparats leicht verbessern, so wie dieselbe sich auch die Kegelfläche selbst wird zu erzeugen haben, ein Geschäft, zu dessen Erleichterung man ausser den Seitenlinien ZB', ZC', ZQ', noch einige andre an passenden Stellen durch Messingdrähte andeuten möge. Der ganze Apparat kann so eingerichtet werden, dass er sich bequem aus einander nehmen, und wieder zusammensetzen lässt.

Es wäre nicht schwer, einen analogen Apparat zur Darstellung der Parabel anzugeben. Ein solcher ist aber ziemlich überflüssig. Etwas umständlicher möchte die Herstellung eines ähnlichen Apparats für die Hyperbel sein; inzwischen ist auch ein solcher wohl ziemlich entbehrlich, da das, was er zeigen würde, schon bei dem Ellipsen-Apparate sein Analoges findet.

Ich habe einen Apparat der eben beschriebenen Art für die Ellipse anfertigen lassen, bei welchem die Annahme $AA' = 6$, $ZA = 4$, $ZA' = 8$ zu Grunde gelegt ist (§. 10.) Die Länge der Linien in demselben ist durchgängig das Doppelte der entsprechenden Linien in den Figuren 1 u. 2.

§. 14.

Eine Cylinderfläche kann als eine Kegelfläche betrachtet werden, deren Spitze in unendlicher Entfernung liegt. Denkt man in Fig. 1. die eine der beiden Kugeln von unveränderlicher Grösse, die Spitze Z des Kegels aber in unendliche Entfernung übergehend, so werden die Seitenlinien alle der Axe ZX parallel, die Kegelfläche wird eine Cylinderfläche, die andre Kugel wird der ersten gleich. Die Schnittcurve in der die beiden Kugeln berührenden ebenen Fläche hört aber dabei nicht auf eine Ellipse zu sein; die beiden Punkte, in denen sie die Kugeln berührt, bleiben die Brennpunkte u. s. w., kurz die in den §§. 7, 8, 9. bewiesenen Haupteigenschaften finden auch hier ihre Anwendung, ja ihre Beweise werden in einigen Punkten noch einfacher, da z. B. AE mit AB, A'E' mit A'C' zusammenfällt, so dass $\triangle ABD \cong A'C'D'$, da ferner PV mit PQ zusammenfällt u. s. w.

In den *Annales de Mathématiques*, Tome XX., findet sich ein Aufsatz von Ampère, überschrieben: *Démonstration élémentaire du principe de la gravitation universelle.* Hier hat Ampère die erste und zweite Eigenschaft (§. 7 u. 8.) für die Ellipse bewiesen, indem er diese als Schnittlinie einer Ebene und eines Cylinders betrachtet. Er bedient sich aber nur einer Kugel, wodurch die Sache weniger einfach wird; dabei erhält er nur einen Brennpunkt, und statt der ersten Haupteigenschaft muss er eine andere davon einfach abhängige beweisen, nämlich die, dass die Verbindungslinien zwischen einem Brennpunkte und den Endpunkten eines Ellipsen-Durchmessers eine constante Summe geben. Die dritte Eigenschaft (§. 10.) fehlt ganz. Der Lectüre dieses Aufsatzes verdanke ich aber den Grundgedanken zu den hier gegebenen die Kegelfläche betreffenden und alle drei Arten von Kegelschnitten umfassenden Betrachtungen. Später fand ich im 15ten Bande derselben *Ann. de Math.* einen Aufsatz, der für diesen Gegenstand noch einen umfassendern Gesichtspunkt darbietet. Derselbe ist überschrieben: *Recherches nouvelles sur les Sections du cône et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ces sections.* In demselben giebt Gergonne einen Auszug aus einer für den dritten Band der *Mém. de l'acad. roy. des sciences de Bruxelles* bestimmten Abhandlung, deren Verf. Dandelin ist. Ob die Abhandlung sich wirklich in den Schriften der Brüsseler Akademie befindet, weiss ich nicht. Dandelin betrachtet darin die Schnitte einer Ebene und eines Hyperboloids *à une nappe.* Ein solches Hyperboloid entstehet, wenn man sich eine gerade Linie in einer festen Verbindung mit einer zweiten, dann aber, ohne Störung dieser Verbindung, sich im Raume um diese zweite Linie, als Umdrehungsaxe, ganz herumdrehend denkt, und ist

der Inbegriff der unendlich vielen Lagen, welche jene sich umdrehende gerade Linie dabei annimmt. Dieses Hyperboloid wird eine Kegelfläche, wenn die beiden Geraden einen Punkt gemein haben; eine Cylinderfläche, wenn die eine der andern parallel ist. Die Begründung, welche Dandelin den Eigenschaften der ebenfalls Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln darstellenden Schnittlinien des Hyperboloids und einer Ebene unterlegt, ist der oben in Bezug auf die Kegelfläche angewandten entsprechend. Dandelin wendet auch zwei Kugeln, nicht bloss eine wie Ampère, an. Er beweiset nur die erste Haupteigenschaft der Schnittcurve (§. 7.), die zweite und dritte (§. 8 u. 9.) berührt er nicht. Dann benutzt er aber diese Betrachtungen weiter, unter andern zur Begründung interessanter Sätze über Sechsecke, welche Kegelschnitten eingeschrieben oder umschrieben sind, namentlich der bekannten Sätze von Pascal und Brianchon.

§. 15.

Im Früheren ist eigentlich nur bewiesen, dass jeder Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel oder Parabel sei, nicht aber das Umgekehrte, dass jede Ellipse, jede Hyperbel, jede Parabel als aus einem Kegel durch das Schneiden mit einer Ebene entstanden gedacht werden kann. Dieses kann man aber leicht aus der Auflösung folgender Aufgabe einsehen: „Es ist eine Ellipse oder eine Hyperbel oder eine Parabel gegeben; man soll eine Kegelfläche angeben, welche in der Ebene der Curve diese hervorbringe.“ Diese Aufgabe ist eine unbestimmte, denn es können immer unendlich viele Kegelflächen gefunden werden, welche zur Hervorbringung einer solchen bestimmten Curve dienen. Die Auflösung geschiehet für die Ellipse und Hyperbel so: Man lege durch die Axe der Curve eine Ebene, lothrecht gegen die Ebene derselben, so ist dieses die Ebene des Dreiecks ZAA'. Nun ziehe man in dieser Dreiecksebene durch den Scheitelpunkt A eine beliebige Gerade AY, und beschreibe zwei Kreise, welche diese Gerade und auch, beziehungsweise in den gegebenen Brennpunkten F und F', die Axe AA' berühren. Dann ziehe man die Linie MM' durch die Mittelpunkte der Kreise, so ist diese Linie die Axe des Kegels, und bildet mit der durch A gezogenen Linie AY den Winkel XZY, der die Kegelfläche erzeugt. Auch für die Parabel ist die Auflösung der Aufgabe ganz leicht.

Man erhebt die Aufgabe zu einer bestimmten, wenn man eine Bedingung hinzufügt. Am wichtigsten ist die Hinzufügung der Bedingung, dass die Kegelfläche eine gegebene (von gegebenem Winkel XZY) sei. Betrachten wir zunächst nur den Fall, wo die gegebene Curve eine Ellipse ist, so kommt die Aufgabe darauf hinaus, das Dreieck ZAA' zu construiren, wenn dafür der Winkel $AZA' = YZW = 2\,XZY$, die gegenüberliegende Seite AA' und die Differenz der andern Seiten, nämlich $ZA' - ZA = FF'$ (s. §. 10.) gegeben ist. Die Auflösung geschiehet folgendermassen. Auf einen Schenkel ZW des gegebenen Winkels

Fig. 4.

trage man ZN = FF′ auf; die Nebenwinkel des gegebenen Winkels halbire man durch eine unbegrenzte Gerade. Aus N beschreibe man mit einem Radius = AA′ einen Kreis, der jene Halbirungslinie in T und t schneide, und verbinde diese Punkte mit N. Dann ziehe man aus T eine Gerade TA parallel mit ZN, so ergiebt sich dadurch der eine Scheitelpunkt A der Ellipse in ZY. Eine aus A mit TN parallel gezogene Gerade bestimmt sodann die Lage der Axe AA′. Denn ziehet man aus A eine Linie AU parallel mit der Halbirungslinie der Nebenwinkel von YZW, so wird △ AUA′ = TZN, also AA′ = TN hat die gegebene Länge; dann ist auch ZA′ — ZA = UA′ = ZN = der gegebenen FF′. Der zweite Schnittpunkt t führt bei ähnlicher Benutzung auf eine Linie aa′ im Scheitelwinkel von YZW, und giebt für die entgegengesetzte Kegelfläche den entsprechenden Schnitt.

Für den Fall einer Hyperbel kommt man auf die Aufgabe zurück: Das Dreieck ZAA′ zu construiren, wenn dafür der Winkel AZA′ = 180⁰ — YZW, die Seite AA′ und die Summe ZA + ZA′ = FF′ gegeben ist. Die Construction geschiehet so. Auf einen Schenkel des Nebenwinkels von YZW, etwa ZW′, trage man ZN = FF′. Den Winkel YZW′ halbire man durch eine Gerade; aus N beschreibe man mit einem Radius = AA′ einen Kreis, welcher die Halbirungslinie des Winkels YZW′ in T und t schneide. Aus T ziehe man nun TA parallel ZW, dann aus A die Linie AA′ parallel TN, so hat man durch die Lage von AA′ die Lage der schneidenden Curvenebene bestimmt. Bei ähnlicher Benutzung des Punktes t bekommt man eine zweite Linie aa′, welche ebenfalls eine zur Auflösung dienende Lage einer Ebene bestimmt. Fig. 5

Wir halten uns bei der sehr leichten Auflösung der Aufgabe für den Fall der Parabel nicht auf.

§. 16.

Es könnte noch gefragt werden, ob nicht, wenn die Curve eine Hyperbel ist, eine einfache Beziehung zwischen den Asymptoten der Hyperbel und der Kegelfläche Statt finden sollte. Die Antwort ist: Man lege durch die Spitze Z der Doppelkegelfläche eine Ebene, parallel der Curvenebene; an den beiden Seitenlinien, in denen die Kegelflächen durch diese Hülfsebene geschnitten werden, lege man Ebenen, welche die Kegelflächen berühren; diese Ebenen werden die Curvenebene schneiden; die beiden Schnittlinien werden die Asymptoten der Hyperbel sein. Der Beweis ist leicht. Mittelst der Theorie harmonischer Punkte und Linien (Mein Lehrbuch d. Geom. §. 289 u. §. 272.) kann man beweisen, dass die beiden die Kegelflächen berührenden Ebenen durch den Mittelpunkt der Axe AA′ hindurchgehen werden. Wir verweilen hiebei nicht, da das Ganze sehr bekannt sein möchte.

II.

Ueber die elementargeometrische Behandlung der Linien der zweiten Ordnung, ohne Anwendung des Kegels.

§. 1.

Der Entwicklung der Eigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel können sehr verschiedene Definitionen dieser Curven zu Grunde gelegt werden. Dieses ist der Hauptgrund davon, dass die Lehre von diesen Curven in verschiedenen Büchern auf so sehr verschiedene Weise behandelt wird. Ich glaube in dieser Hinsicht folgende Hauptmethoden auszeichnen zu dürfen: 1) Will man das Ganze sogleich aus einem höhern Standpunkte nach analytischer Methode betrachten, so kann man von der allgemeinen algebraischen Gleichung vom zweiten Grade, zwischen zwei Veränderlichen ausgehen, und die genannten Curven durch ihre aus den Coefficienten in dieser Gleichung geschöpften Bedingungsgleichungen characterisiren. So vorzüglich diese Methode in rein wissenschaftlicher Hinsicht auch sein mag, so scheint sie doch für den Elementarunterricht nicht unbedingt empfohlen werden zu können. 2) Man kann diese Curven als Schnittlinien eines Kegels und einer Ebene definiren, und ihre weiteren Eigenschaften dann entweder geometrisch ableiten, wie in Bezug auf einige wenige der Haupteigenschaften im Vorigen versucht wurde, oder durch Rechnung, wie es z. B. in Biot's analytischer Geometrie geschiehet. 3) Man kann für die Ellipse die Eigenschaft der constanten Summe der Brennstrahlen eines Punktes, für die Hyperbel die Eigenschaft der constanten Differenz solcher Brennstrahlen, für die Parabel die Eigenschaft der gleichen Abstände eines jeden Punkts der Curve vom Brennpunkte und von der Directrix zur Grundlage wählen. 4) Man kann von der Eigenschaft ausgehen, dass es für jeden Brennpunkt einer solchen Curve eine zugehörige gerade Linie giebt, von der Beschaffenheit, dass die Entfernungen eines Punktes der Curve vom Brennpunkte und von der geraden Linie ein constantes Verhältniss geben. (Siehe I. §. 10.) Diese Methode wird, auf dem Wege der Rechnung, in P. H. Hamilton's System der Kegelschnitte, übers. von Benckendorff (Berlin, 1828), befolgt, möchte aber nicht sehr zu empfehlen sein. 5) Man kann endlich diese Curven als geometrische Orte der Mittelpunkte von Kreisen betrachten, welche einen gegebenen Punkt und einen gegebenen Kreis, oder, was die Parabel betrifft, einen Punkt und eine gerade Linie berühren sollen. Diese Methode scheint sich besonders für die geometrische Behandlung sehr zu empfehlen, in so fern sich in derselben die Lehre von jenen Curven sehr nett an die sonstigen Elemente der Geometrie, und zwar namentlich an die übrigen Berührungsaufgaben anschliesst; auch ist diese Ansicht unsrer Curven innig mit der unter 3. angegebenen

verwandt, so dass sich von der einen höchst leicht zu der andern übergehen lässt. Mit dieser Methode hat sich schon Herr Katzfey in dem Programme des Gymnasiums zu Münstereifel vom Jahre 1826 beschäftigt; auch in den folgenden Blättern soll sie, aber unabhängig von diesem Vorgänger, angewandt werden. Noch bemerke ich, dass diese Ansicht auch eine Erweiterung zulässt, indem man statt des gegebenen Punktes einen gegebenen Kreis anwendet, und erwähne, dass Herr Prof. Horner in Zach's *Correspondance astronomique &c.* T. 4. (1820) p. 440. jene Curven als Orte des Mittelpunkts eines Kreises betrachtet hat, der zwei gegebene und einander berührende Kreise, oder (in Hinsicht der Parabel) eine gerade Linie und einen dieselbe berührenden Kreis berührt.

§. 2.

Die Aufgabe: „In einer Ebene einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis, dessen Centrum F′, dessen Radius = F′a sei, und einen innerhalb desselben liegenden Punkt F berühre,“ ist offenbar eine unbestimmte. Jeder auflösende Kreis muss sein Centrum M innerhalb des gegebenen Kreises (F′) haben, und berührt er denselben in G, so muss sein FM = GM, dann Fig. 6.

$$FM + F'M = GM + F'M = F'G = \text{dem Radius des Kreises } (F').$$

Der geometrische Ort des Punktes M hat also die Eigenschaft, dass die Summe der Linien FM und F′M constant ist. Man nennt denselben eine Ellipse. Die Punkte F, F′ sind die Brennpunkte, die Linien FM, F′M die Brennstrahlen des Punktes M.

Es werde durch F der Durchmesser aFF′b und senkrecht dagegen die Sehne cd gezogen; dann denke man den Punkt G nach einander in den Lagen a, b, c, d, und leite daraus nach der Reihe die Punkte A, B, C, D der Ellipse ab, so erhält man dadurch die grosse Axe (Focalaxe, Hauptaxe) AB, und die kleine Axe (Queraxe) CD. Diese Axen halbiren einander in O, dem Mittelpunkte von FF′, unter rechten Winkeln, und es ist

$$OA = OB = FC = F'C = FD = F'D = \tfrac{1}{2}\text{ Radius von } (F').$$

Man beschreibe einen zweiten Kreis (F) aus dem Centrum F mit einem Radius gleich dem Radius des Kreises (F′), verlängere FM, bis die Verlängerung den Kreis (F) in G′ schneidet, so hat man auch F′M = G′M, ferner F′G′ parallel FG. Fig. 7.

Wären die Punkte F und F′ gegeben, und die Curve als geometrischer Ort des Punktes M construirt, für welchen FM + F′M eine constante Summe = AB giebt, so könnte man die beiden Kreise (F′) und (F) beschreiben, jeden mit einem Radius = AB, und nun auch die Curve als geometrischen Ort des Mittelpunkts eines Kreises betrachten, der entweder den Punkt F und den Kreis (F′) oder den Punkt F′ und den Kreis (F) berührt. Hienach kann man also die Ellipse auf doppelte Weise definiren; entweder als den Ort des Mittelpunkts eines Kreises, der in einer Ebene einen gegebenen Kreis und einen innerhalb dessel-

ben liegenden Punkt berührt, oder als den Ort eines Punktes in einer Ebene, dessen Abstände von zwei festen Punkten in dieser Ebene eine constante Summe geben.

Die beiden Kreise (F′) und (F) mögen die Richtkreise der Ellipse heissen.

Wird eine Linie durch F gezogen, welche den Richtkreis (F′) in G und g schneidet, so führen diese Punkte zu zwei Punkten M und m der Ellipse, welche einen Durchmesser Mm begrenzen.

§. 3.

Fig. 8. Auf ähnliche Art ist auch die Aufgabe: „Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis (F′) und einen ausserhalb desselben liegenden Punkt F berührt," eine unbestimmte. Es giebt hier auflösende Kreise, welche den Kreis (F′) von aussen berühren, andre, die ihn einschliessen und berühren. Für den Mittelpunkt M eines auflösenden Kreises der ersten Art ist

$$\text{(I)} \qquad F'M - FM = \text{dem Radius von } (F');$$

für einen Punkt M eines auflösenden Kreises der zweiten Art dagegen

$$\text{(II)} \qquad FM - F'M = \text{dem Radius von } (F').$$

So begründet man den Begriff und zugleich eine Eigenschaft der Hyperbel. Die Gleichungen (I) und (II) untercheiden die beiden Zweige derselben. Wir halten uns bei dem Uebrigen, was dem in §. 2. Gesagten analog sein würde, nicht auf, ausser bei der Art, wie man die Asymptoten der Hyperbel mit der gegebenen Erklärung in Verbindung setzt.

Man ziehe aus F die Berührenden Fc und Fd an den Kreis (F′), dann ziehe man für diese Berührenden die Halbirungslothe CC′ und DD′, welche sich im Mittelpunkte O von FF′ schneiden werden, so sind diese beiden Halbirungslothe die Asymptoten der Hyperbel.

Für einen Punkt G (analog dem Punkte G in §. 2.) in dem kleineren Bogen cad des Kreises (F′) erhält man einen Auflösungskreis, der den (F′) von aussen berührt, und für seinen Mittelpunkt gilt die Gleichung (I); für einen Punkt G im grössern Bogen cbd dagegen findet sich ein Auflösungskreis, für dessen Mittelpunkt die Gleichung (II) gilt. Die Punkte des Bogens cad führen also zu dem einen, die Punkte des Bogens cbd zum andern Zweige der Hyperbel.

Die aus F nach c gezogene Berührende kann selbst als ein auflösender Kreis mit unendlich grossem Radius betrachtet werden; ebenso die Berührende Fd; die Mittelpunkte dieser Kreise, welche also zur Curve gehören, sind als Punkte der Asymptoten, aber in unendlicher Entfernung nach C oder C′, und nach D oder D′ zu liegend zu denken.

§. 4.

Fig. 9. Man denke bei der Ellipse den Punkt F fest, den F′ aber in der Linie FF′ ins Unendliche rückend, den Radius des Kreises (F′) aber zugleich immer in der Art wachsend, dass

dieser Kreis immer durch den Punkt a gehe; dann wird endlich der Kreis zu einer geraden Linie Uu, die Linie GF′ der FF′ parallel werden, und, wie sonst, die Gleichung FM = GM gelten. So gelangt man zur **Parabel**, als einem Grenzzustande der Ellipse. Dieselbe lässt sich aber ebenso als ein Grenzzustand der Hyperbel ansehen. Die Definition ist entweder: „Eine Parabel ist der Ort eines Punktes in einer Ebene, dessen Entfernungen von einem festen Punkte F und einer festen Linie Uu, beide in dieser Ebene, einander gleich sind;“ oder: „Eine Parabel ist der geometrische Ort des Mittelpunkts eines Kreises, der einen Punkt und eine gerade Linie berührt.“

Die Linie Uu heisse die **Richtlinie** (Leitlinie, Directrix) der Parabel. Da sie dem Kreise (F′) für die Ellipse und Hyperbel entsprechend ist, so rechtfertigt sich die Benennung Richtkreise, welche wir in §. 2. einführten. Es ist merkwürdig, dass die Richtlinie der Parabel bei der Ellipse und der Parabel zweierlei entsprechende Dinge hat; nämlich ausser diesen Richtkreisen auch die geraden Richtlinien, von denen in I. §. 8. die Rede war.

Der Punkt A ist der **Scheitelpunkt**; die durch A und den Brennpunkt F gehende Gerade die **Axe** der Parabel. Eine durch den Scheitelpunkt lothrecht gegen die Axe gezogene Gerade kann das **Scheitelloth** heissen.

§. 5.

Eine Ellipse oder eine Hyperbel in einer Ebene ist bestimmt, wenn die Länge und Lage der Hauptaxe AB und die Lage der Brennpunkte F, F′ in dieser Axe gegeben sind; eine Parabel ist bestimmt, sobald die Richtlinie Uu und der Brennpunkt F gegeben sind. Folgende Aufgabe nun ist von Wichtigkeit: „Eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist durch diese Bestimmungsstücke bestimmt, aber nicht selbst gezeichnet, man soll direct, und ohne Zeichnung der Curve selbst, die Punkte einer ihrer Lage nach gegebenen Geraden RS bestimmen, welche diese Gerade mit der Curve gemein hat.“

Wir gelangen zunächst für die **Ellipse** leicht zu der Auflösung dieser Aufgabe unter Benutzung eines der beiden Richtkreise, z. B. des (F′). Ein Punkt M der Geraden RS werde als ein auflösender Punkt angesehen, so muss ein Kreis mit dem Centrum M und dem Radius MF den Kreis (F′) berühren. Man fälle aus F ein Loth Fp auf RS, und verlängere dasselbe, bis es den Kreis (M) in einem Punkte q trifft, so muss pq = Fp sein. Hiedurch ist der Punkt q gegeben. Der Kreis (M) gehet also durch die beiden gegebenen Punkte F und q und berührt den Kreis (F′). Sonach kommt unsre Aufgabe auf die Apollonische Berührungsaufgabe zurück: „Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte hindurchgehe und einen gegebenen Kreis berühre.“ Wählen wir zur Auflösung dieser Aufgabe die netteste Methode (S. mein Lehrbuch der Geometrie I. dritte Auflösung.), so bekommen wir zuletzt folgende Vorschrift zur Auflösung der obigen Aufgabe: Aus zwei beliebigen Punk- Fig. 10.

ten μ und μ' der Geraden RS beschreibe man zwei Kreise auf die Weise, dass jeder durch den Punkt F hindurch gehe. Diese werden einander auch in q schneiden. Der eine treffe aber den Kreis (F′) in D und E, der andre thue dies in D′ und E′. Man ziehe nun die Geraden DE und D′E′, welche einander in Z schneiden mögen. (Auch die Gerade Fp würde diesen Punkt treffen; einer der beiden Kreise (μ) und (μ') könnte also erspart werden; aber die Anwendung dieser beiden Kreise scheint besser, als die Anwendung nur des einen und des Lothes Fp). Ueber F′Z als Durchmesser beschreibe man hierauf einen Kreis, welcher den (F′) in G und G_1 schneide, dann ziehe man F′G und F′G_1, so sind die Schnittpunkte M und M_1 dieser beiden Linien mit RS die gesuchten Punkte, welche die Ellipse mit der Geraden RS gemein hat.

Für die Hyperbel geschiehet die Auflösung der obigen Aufgabe ganz auf ähnliche Fig.11. Weise. Bei derselben Untersuchung für die Parabel kommt man aber auf die Aufgabe zurück: „Es sind zwei Punkte gegeben und eine gerade Linie; man soll einen Kreis beschreiben, der durch die Punkte hindurchgehe, und die gerade Linie berühre.“ Die Vorschrift zur Construction lautet so: Aus zwei Punkten μ und μ' der Geraden RS beschreibe man zwei Kreise, jeden durch F. Diese schneiden einander ausser in F noch in einem zweiten Punkte q. Man ziehe Fq. Der Schnittpunkt dieser Linie mit Uu sei Z. An den einen der Kreise (μ) oder (μ') ziehe man aus Z eine Berührende ZK, und mache in Uu $ZG = ZG_1 = ZK$, dann errichte man gegen Uu aus G und G_1 die Lothe GM und G_1M_1, so sind die Punkte M und M_1, in denen diese Lothe die RS treffen, die gesuchten Punkte.

In den *Ann. de Math.* T. VII. p. 304. giebt Coste eine Auflösung der obigen Aufgabe, die aber weitläufig und ohne sonderlichen Werth ist. Für die Hyperbel hat Dandelin die Aufgabe in der *Correspondance sur l'école polytechnique.* III. p. 203. unter Benutzung der Asymptoten gelöset. — Es mag noch bemerkt werden, dass die obige Auflösung für die Ellipse und Hyperbel auch ganz einfach zur Auflösung der Aufgabe führt: Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, die Summe oder Differenz der beiden andern Seiten und das zur ersten gegebenen Seite aus dem gegenüberliegenden Eckpunkte gefällte Loth gegeben ist.

§. 6.

Die eben gelösete Aufgabe ist in Bezug auf weitre Betrachtungen und Resultate, welche daraus herfliessen, von Wichtigkeit. Wenn bei der $\left\{\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right\}$ der Punkt q eben so wie F $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ des Kreises (F′) liegt, so erhält man zwei Punkte M; liegt q in der Peripherie des Kreises (F′), so fallen auch die Punkte Z, G und G_1 in diesen Punkt q, und man erhält nur einen Punkt M; fällt endlich q $\left\{\begin{matrix}\text{ausserhalb}\\ \text{innerhalb}\end{matrix}\right\}$ des Kreises (F′), so findet man keinen Schnittpunkt der RS und der Curve.

Wenn bei der Parabel der Punkt q von Uu aus mit F in derselben Ebenenhälfte liegt, so bekommt man zwei Punkte M; wenn q in Uu liegt, so fallen auch die Punkte Z, G und G_1 in diesen Punkt, und man erhält nur einen Punkt M; wenn endlich q über Uu hinaus liegt, so bekommt man keinen Punkt M.

So findet sich: Eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel kann von einer Geraden nicht in mehr als zwei Punkten geschnitten werden.

In denjenigen Fällen, wo q in der Peripherie von (F′) oder in der Richtlinie Uu liegt, und G mit ihm zusammenfällt, wo also nur ein Punkt M gefunden wird; liegt die Linie RS so, dass sie den Winkel FMq oder FMG halbirt. Umgekehrt, wenn RS durch einen Punkt M der Curve so hindurchgehet, dass der Winkel FMG halbirt wird, so liegt q im Punkte G in der Peripherie von (F′), RS hat nur diesen Punkt M mit der Curve gemein; von jeder andern Geraden, die durch M gezogen wird, kann man dagegen, wieder unter Anwendung der in §. 5. gelöseten Aufgabe, leicht zeigen, dass sie ausser M noch einen zweiten Punkt mit der Curve gemein haben muss. Die Linie, welche den Winkel FMG halbirt, ist eine Berührende der Curve.

Giebt man, für den Fall einer Hyperbel, der Linie RS eine solche Lage, dass sie einer Asymptote, etwa der CC′ in Fig. 3., parallel ist, so erhält man, weil CC′ gegen Fc lothrecht ist, einen Punkt q, welcher in Fc liegt, der eine auflösende Kreis, es sei (M_1), gehet in die Berührende Fc über, und der zugehörige Punkt M_1 der Hyperbel liegt in RS in unendlicher Entfernung; der andre auflösende Kreis (M) dagegen giebt einen wirklichen Schnittpunkt von RS und der Hyperbel. Wenn endlich RS in die Lage einer Asymptote, etwa CC′ selbst übergehet, so fällt q in c, und beide auflösende Kreise (M) und (M_1) haben ihre Mittelpunkte in unendlicher Entfernung. So kann jede Asymptote als eine Gerade angesehen werden, die mit der Hyperbel zwei unendlich weit entfernte Punkte gemein hat.

§. 7.

Die Ellipse kann unter andern auf folgende Weise construirt werden, wenn die grosse Axe und die Brennpunkte gegeben sind. Man beschreibe aus den Brennpunkten die Richtkreise (F′) und (F), und aus dem Mittelpunkte O über der Hauptaxe AB als Durchmesser einen dritten Hülfskreis (O), welcher der Mittelpunktskreis heissen könnte. Man ziehe durch F und F′ in beliebiger Richtung, aber mit einander parallel, zwei Gerade. Die durch F gezogene Gerade schneide den Kreis (F′) in G und g, den Kreis (O) in K und k; die durch F′ gezogene treffe den Kreis (F) in G′ und g′ und den (O) in K′ und k′. Dann ziehe man die Geraden FG′, Fg′, F′G, F′g, KK′, kk′; so sind die Schnittpunkte von FG′ mit F′G und von Fg′ mit F′g zwei Punkte der Ellipse, und die Linien KK′, kk′ sind die Berührenden der Ellipse für diese Punkte. Indem man auf diese Weise so viele Punkte und Berüh- Fig. 7.

rende der Ellipse bestimmen kann, wie man will, erhält man die Ellipse mit Bequemlichkeit und Genauigkeit.

Fig. 12 Eine ähnliche Methode ist bei der Hyperbel anwendbar. Zur Construction der Parabel, wenn Uu und F gegeben, dient unter andern folgende Methode. Man beschreibe aus F mit einem Radius, grösser als $\frac{1}{2}$ Fa, einen Kreis, welcher die Axe der Parabel, von F aus nach der Seite von a hin, in einem Punkte P schneide; dann beschreibe man aus P mit demselben Radius, einen Kreis, der Uu in G und g schneide, und nun aus G und g Kreise, welche mit dem ersten aus F beschriebenen Kreise die Schnittpunkte M und m geben; endlich ziehe man die Geraden MP, mP: so hat man zwei Punkte der Parabel, M und m, nebst den Berührenden PM und Pm an diesen Punkten.

§. 8.

Fig. 13 Die Aufgabe: „Aus einem gegebenen Punkte P, welcher ausserhalb einer Ellipse liegt, deren grosse Axe und Brennpunkte bekannt sind, welche selbst aber nicht einmal gezeichnet zu sein braucht, an dieselbe Berührende zu ziehen, und deren Berührungspunkte zu bestimmen" wird so gelöset:

Man beschreibe einen der Richtkreise, etwa den (F'); dann aus P mit einem Radius = PF einen Kreis, welcher jenen Richtkreis in G und G_1 schneide; halbire hierauf die Winkel FPG und FPG_1 durch die Linien PM und PM_1, so sind dieses die gesuchten Berührenden. Zieht man hierauf auch die Geraden F'G, $F'G_1$, so sind die Schnittpunkte dieser Linien mit jenen Berührenden die Berührungspunkte M und M_1.

Fig. 14 Für eine Hyperbel wird die entsprechende Aufgabe ganz analog gelöset. Für eine Parabel, deren Brennpunkte F und Richtlinie Uu gegeben sind, löset man dieselbe Aufgabe, indem man aus P mit PF einen Kreis beschreibt, die Schnittpunkte G und G_1 dieses Kreises und der Uu mit P verbindet, die Winkel FPG und FPG_1 halbirt, endlich aus G und G_1 auf Uu Lothe errichtet.

Diese bekannten Methoden mussten hier erwähnt werden, weil sie sehr dienlich sind, um auf die nun folgenden Untersuchungen vorzubereiten, welche, wenigstens in Hinsicht der Beweismethode, weniger bekannt sein möchten.

§. 9.

Fig. 13 Man wende die eben gezeigte Auflösung der Aufgabe, aus einem Punkte P an eine durch grosse Axe und Brennpunkte bestimmte Ellipse Berührende zu ziehen auf dieselbe Ellipse und denselben Punkt P doppelt an, indem man nicht bloss den Hülfskreis (F'), sondern auch den (F) construirt, und in dessen Peripherie die Punkte G' und G'_1 bestimmt;

dann hat man eine Figur, aus welcher sich leicht mehre interessante Eigenschaften der Ellipse herleiten lassen. Nämlich:

1) Wegen gleicher Seiten hat man $\triangle F'PG \cong F'PG_1$, und $\triangle FPG' \cong FPG'_1$. Daher folgt $\angle PF'M = PF'M_1$ und $\angle PFM = PFM_1$. „Die Verbindungslinie eines Brennpunkts und des Schnittpunkts zweier Berührenden an einer Ellipse halbirt den Winkel, den an demselben Brennpunkte die von ihm zu den beiden Berührungspunkten gezogenen Linien mit einander bilden."

2) Man ziehe an einem beliebigen Punkte m der Ellipse eine dritte Berührende, welche PM in p, PM_1 in p_1 schneide. Dann ist, nach 1., $\angle MFp = pFm$ und $\angle mFp_1 = p_1FM_1$, und daher

$$\angle pFp_1 = \tfrac{1}{2} MFM_1 = MFP = PFM_1.$$

„Das Stück einer beweglichen Berührenden, welches durch zwei feste Berührende begrenzt wird, erscheint aus einem jeden Brennpunkte unter einem constanten Gesichtswinkel."

Die Sätze 1 u. 2. hat Poncelet in den *Annales de Mathém.* T. VIII. p. 4 u. 5. anders und in umgekehrter Ordnung bewiesen.

3) Wegen gleicher Seiten ist $\triangle FPG'_1 \cong GPF'$, daher die Winkel dieser Dreiecke an P gleich; folglich auch $\angle FPG = F'PG'_1$, daher auch deren Hälften FPM, FPM_1 gleich. „Die Verbindungslinie des Schnittpunkts zweier Berührenden mit einem Brennpunkte macht mit der einen Berührenden denselben Winkel, wie die Verbindungslinie des Schnittpunktes der Berührenden und des andern Brennpunktes mit der andern Berührenden."

Dieser Satz ist, im Wesentlichen auf dieselbe Art, von Herrn Oberlehrer Kroll in dem Programme des Gymnasiums zu Eisleben vom Jahre 1831 bewiesen. In einer höchst eigenthümlichen Behandlung findet er sich in Plücker's analytisch-geometrischen Entwicklungen. Th. I. S. 207.

4) Die Linien FK und F'K' sind lothrecht auf PM, so wie FK_1 und $F'K'_1$ lothrecht auf PM_1. Man findet nun

$$\triangle PFK \sim PF'K'_1 \quad \text{und} \quad FK : F'K'_1 = PF : PF',$$

und eben so

$$\triangle PFK_1 \sim PF'K' \quad \text{woher} \quad FK_1 : F'K' = PF : PF',$$

und hieraus folgt

$$FK \,.\, F'K' = FK_1 \,.\, F'K'_1.$$

„Das Product der beiden Lothe, die auf eine Berührende aus den beiden Brennpunkten gefällt werden, hat einen constanten Werth, die Berührende liege, wie sie wolle." — Indem man eine Berührende zu Hülfe ruft, welche der Hauptaxe parallel ist, zeigt sich leicht, dass der constante Werth dem Quadrate der halben kleinen Axe gleich ist.

Für die Hyperbel finden sich ganz analoge Sätze.

§. 10.

Von jetzt an sollen bloss noch die sehr mannichfaltigen Eigenschaften der Berührungs-

linien an einer Parabel den Gegenstand unsrer Betrachtungen bilden. Zunächst wollen wir ein Paar sehr bekannte Sätze aufstellen.

Fig. 9. Aus dem Punkte M sei ein Loth MG auf Uu gefällt, ferner sei MF gezogen und der Winkel FMG durch eine Gerade halbirt, so ist diese Halbirungslinie nach §. 6. eine Berührende am Punkte M. Man ziehe FG, welche Gerade die Berührende in K schneide, und die Gerade FE nach dem Punkte E, in welchem die Berührende die Uu schneidet. Dann findet man:

1) Es ist $\angle$ MFE $=$ MGE $= 90^0$. „Die beiden Linien, welche aus dem Brennpunkte einer Parabel zu dem Berührungspunkte einer Berührenden und dem Schnittpunkte dieser Berührenden und der Richtlinie gezogen werden, bilden am Brennpunkte einen rechten Winkel."

2) Das Scheitelloth (s. §. 4.) schneidet die FG im Mittelpunkte K, durch den auch die Berührende gehet, und es ist $\angle$ FKM ein rechter. „Eine Linie, welche vom Brennpunkte nach dem Schnittpunkte einer Berührenden und des Scheitellothes gezogen wird, macht mit der Berührenden einen rechten Winkel."

§. 11.

Fig. 14 1) An den Punkten M und M_1 einer Parabel seien Berührende gezogen, welche einander in P treffen, und aus jenen Punkten seien auch die Lothe MG, M_1G_1 zur Richtlinie Uu gefällt. Dann hat man (vergl. §. 8.) $\triangle$ PFM $\cong$ PGM, $\triangle$ $PFM_1 \cong PG_1M_1$, und

$\angle$ PGM $=$ PFM, $\angle$ $PG_1M_1 = PFM_1$, aber auch $\angle$ PGM $= PG_1M_1$,

folglich auch $\angle$ PFM $= PFM_1$.

Diese Gleichung enthält für die Parabel einen Satz, der sich für die Ellipse (und Hyperbel) schon in §. 9. 1. bewiesen findet.

2) An einem dritten Punkte m der Parabel werde eine Berührende gezogen, welche PM in p, PM_1 in p_1 schneide, so ist, wie man durch Anwendung von 1. leicht findet, $\angle$ $pFp_1 = MFP = PFM_1$. Hierin liegt ein Satz, der mit dem von der Ellipse (und Hyperbel) in §. 9. 2. bewiesenen ganz übereinstimmt.

3) In den Dreiecken PGM und PGG_1 haben wir

$$\angle MPG + PGM + PMG = 180^0$$

$$\angle GPG_1 + PGG_1 + PG_1G = 180^0 \text{ oder } FPG + FPG_1 + 2 \cdot PGG_1 = 180^0.$$

Lassen wir in der ersten Gleichung vom Winkel PGM den rechten Winkel G_1GM weg, und dividiren die letzte Gleichung durch 2, so kommt

$$\angle MPG + PGG_1 + PMG = 90^0$$

$$\angle MPG + M_1PG_1 + PGG_1 = 90^0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun $\angle$ PMG $=$ M_1PG_1, und überhaupt

$$\angle FMP = PMG = FPM_1 = M_1PG_1.$$

Eben so ist $\angle FM_1P = PM_1G_1 = FPM = MPG.$

Man ziehe nun Pf der Axe AF parallel, und nenne diese Linie, wie jede Gerade, die der Axe AF parallel ist, einen Durchmesser der Parabel. Dann hat man $\angle$MPf $=$ PMG und daher auch MPf $= FPM_1$. Diese Gleichung enthält für die Parabel einen Satz, der dem in §. 9. 3. für die Ellipse (und Hyperbel) bewiesenen entspricht, in so fern der zweite Brennpunkt der Parabel als ein in der Axe AF in unendlicher Entfernung liegender Punkt zu denken ist.

4) Die Dreiecke MFP und PFM_1 sind einander ähnlich, und dessbalb

$$FM : FP = FP : FM_1 \quad \text{also} \quad FP^2 = FM \,.\, FM_1.$$

Ferner hat man $FM : FP = PM : PM_1$

$$FP : FM_1 = PM : PM_1$$

und folglich $FM : FM_1 = PM^2 : PM_1^2.$

5) Der Winkel MPM_1 ist immer die Hälfte des Winkels GPG_1, und der Winkel PFM, so wie PFM_1, immer das Supplement von MPM_1. Der Punkt P liege nun in Uu, so ist $GPG_1 = 180^0$, also $MPM_1 = 90^0$; dann auch $PFM = PGM = 90^0$, und $PFM_1 = PG_1M_1 = 90^0$. Hieraus folgt: „Werden aus einem Punkte der Richtlinie zwei Berührende an eine Parabel, und auch eine Gerade zum Brennpunkte gezogen, ferner die beiden Berührungspunkte durch eine Sehne verbunden: so bilden die Berührenden einen rechten Winkel mit einander, die Sehne zwischen den Berührungspunkten gehet durch den Brennpunkt hindurch, und die aus dem Punkte der Richtlinie zum Brennpunkte gezogene Linie trifft diese Sehne lothrecht."

Liegt P in dem Raume zwischen der Parabel und der Richtlinie, so ist der Winkel MPM_1 ein stumpfer, die Berührungssehne MM_1 schneidet die Axe zwischen dem Scheitel- und dem Brennpunkte und die Winkel PFM, PFM_1 sind spitze. Liegt dagegen P jenseit der Richtlinie, so ist der Winkel MPM_1 ein spitzer, die Berührungssehne schneidet die Axe in einem in der Verlängerung von AF liegenden Punkte, und die Winkel PFM, PFM_1 sind stumpfe.

Diese Sätze erlauben mannigfache Umkehrungen.

§. 12.

1) Der Durchmesser Pf treffe die Richtlinie in H, so ist H der Mittelpunkt von GG_1. Fig. 15
Fällt man also aus den Berührungspunkten zweier Berührenden an einer Parabel Lothe auf die Richtlinie, und auch aus dem Schnittpunkte jener Berührenden ein Loth zur Richtlinie, so ist der Fusspunkt des letzten Lothes der Mittelpunkt des von den Fusspunkten der ersten

beiden Lothe begrenzten Stückes der Richtlinie. Dieser Satz ist weniger an sich von Interesse, als vielmehr nur, in so fern er zur Begründung andrer Sätze dient.

2) Der Durchmesser Pf schneide die Berührungssehne MM_1 in I, so ist auch I der Mittelpunkt von MM_1. Also: „Der durch den Schnittpunkt zweier Berührenden an einer Parabel gezogene Durchmesser halbirt die zwischen den Berührungspunkten liegende Sehne."

3) Der Durchmesser Pf treffe die Parabel in 𝔄, welchen Punkt wir den Scheitelpunkt des Punktes P oder auch des Durchmessers Pf nennen wollen. An 𝔄 ziehe man eine Berührende, welche PM in S, PM_1 in S_1 schneide. Aus S und S_1 fälle man die Lothe SL und S_1L_1 zur Richtlinie; dann ist, nach 1., L der Mittelpunkt von GH, L_1 der Mittelpunkt von G_1H. Die Linie GG_1 ist durch die Punkte L, H, L_1 in vier gleiche Theile getheilt. Daraus folgt, dass S der Mittelpunkt von PM, S_1 der Mittelpunkt von PM_1 sein muss, dann ferner, dass SS_1 der MM_1 parallel und 𝔄 der Mittelpunkt von PI ist. Also: „Die Sehne zwischen den Berührungspunkten zweier Berührenden an einer Parabel ist parallel der am Scheitelpunkte des Schnittpunktes dieser Berührenden gezogenen Berührenden." Ferner:

4) „Wird am Scheitelpunkte des Schnittpunktes zweier Berührenden einer Parabel eine dritte Berührende gezogen, so halbirt dieselbe die beiden Berührenden, in so fern jede von jenem Schnittpunkte und von dem Punkte begrenzt ist, in dem sie die Parabel berührt, und auch das Stück dieser dritten Berührenden, welches von den ersten Berührenden begrenzt ist, ist in seinem Berührungspunkte halbirt." Endlich:

5) „Werden aus einem Punkte eines Durchmessers einer Parabel zwei Berührende an dieselbe gezogen, und die Berührungspunkte durch eine Sehne verbunden, so hat das Stück dieses Durchmessers, welches von jenem Punkte und dieser Sehne begrenzt is, seinen Schnittpunkt mit der Parabel zu seinem Mittelpunkte."

§. 13.

Fig. 16 Eine Parabel werde in den Punkten M, M_1, M_2 von drei Geraden P_1P_2, PP_2, PP_1 berührt, wo P, P_1, P_2 die Schnittpunkte je zweier dieser Berührenden bezeichnen. Auf die Richtlinie seien aus M, M_1, M_2 die Lothe MG, M_1G_1, M_2G_2, aus P, P_1, P_2 die Lothe PH, P_1H_1, P_2H_2 gefällt. Die Schnittpunkte dieser letzteren Lothe mit den Berührenden P_1P_2, PP_2, PP_1 mögen nach der Reihe heissen N, N_1, N_2. Dann können wir folgende Betrachtungen anstellen:

1) Weil H der Mittelpunkt von G_1G_2, H_1 der von GG_2 und H_2 der von GG_1 (§. 12. 1.) so hat man

$$HH_1 = H_2G = G_1H_2 \quad \text{nämlich alle} = \tfrac{1}{2}\, G_1G,$$
$$H_1H_2 = HG_1 = G_2H \quad \ldots\ \ldots = \tfrac{1}{2}\, G_2G_1,$$
$$H_2H = H_1G_2 = GH_1 \quad \ldots\ \ldots = \tfrac{1}{2}\, GG_2.$$

Weil aber die sechs aus den Punkten M… und P… zur Richtlinie gefällten Lothe alle einander parallel sind, so erhält man nun Proportionen, welche aussagen, dass in jeder Berührenden durch den darin liegenden Berührungspunkt und die beiden darin enthaltenen Schnittpunkte Linien gebildet sind, welche in gleichen Verhältnissen stehen. Nämlich es ist:

$PM_2 : M_2P_1 = P_1P_2 : MP_1 = PM_1 : P_2P$ nämlich jedes $= H_1H_2 : H_2H$,
$P_1M : MP_2 = P_2P : M_1P_2 = P_1M_2 : PP_1$ … … $= H_2H : HH_1$,
$P_2M_1 : M_1P = PP_1 : M_2P = P_2M : P_1P_2$ … … $= HH_1 : H_1H_2$.

2) Wegen paralleler Linien ist nun $N_2P_1 : PN_2 = H_1H_2 : H_2H$.
In 1. war aber auch $PM_2 : M_2P_1 = H_1H_2 : H_2H$.
Hieraus folgt, dass die Linie PP_1 durch den Punkt N_2 in zwei Theile von derselben Grösse getheilt ist, wie durch den Punkt M_1, oder dass

$$P_1N_2 = M_2P \text{ und } PN_2 = M_2P_1.$$

Für P_1P_2 gilt eben so $P_2N = MP_1$ und $P_1N = MP_2$,
endlich für P_2P $PN_1 = M_1P_2$ und $P_2N_1 = M_1P$.

3) Aus 1. hat man die Gleichungen

$$\frac{PM_2}{M_2P_1} = \frac{H_1H_2}{H_2H}, \quad \frac{P_1M}{MP_2} = \frac{H_2H}{HH_1}, \quad \frac{P_2M_1}{M_1P} = \frac{HH_1}{H_1H_2}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen bekommt man

$$\frac{PM_2}{M_2P_1} \times \frac{P_1M}{MP_2} \times \frac{P_2M_1}{M_1P} = 1,$$

woraus sich nach der Transversalentheorie ergiebt, dass die drei Geraden PM, P_1M_1 u. P_2M_2 einander in einem einzigen Punkte treffen. Also: „Sind an einer Parabel drei Berührende gezogen, und man verbindet jeden Berührungspunkt einer Berührenden mit dem Schnittpunkt der beiden andern Berührenden, so schneiden die drei Verbindungslinien einander in einem einzigen Punkte."

4) Der Durchmesser M_2G_2 des Berührungspunktes M_2 werde verlängert, bis er die Berührungssehne MM_1 in Q_2 schneide. Dann ist Fig. 17

$$M_1Q_2 : Q_2M = G_1G_2 : G_2G = H_1H_2 : H_2H.$$

Nach 1. ist aber auch $PM_1 : P_2P = H_1H_2 : H_2H$
und $P_1P_2 : MP_1 = H_1H_2 : H_2H$.
Mithin ist $PM_1 : P_2P = M_1Q_2 : Q_2M$ und $P_1P_2 : MP_1 = M_1Q_2 : Q_2M$.
Folglich ist PQ_2 parallel mit P_2M und P_1Q_2 parallel mit P_2M, also das Viereck $P_1P_2PQ_2$ ein Parallelogramm. Auf ähnliche Art ergeben sich die Parallelogramme P_2PP_1Q und $PP_1P_2Q_1$.

Also: „Berühren die Seiten eines Dreiecks eine Parabel, und man bestimmt den Schnittpunkt des Durchmessers eines der drei Berührungspunkte mit der Sehne zwischen den beiden

andern Berührungspunkten, so bildet derselbe, als vierter Eckpunkt, mit den drei Eckpunkten jenes Dreiecks ein Parallelogramm, das diejenige Seite des Dreiecks zur Diagonale hat, welche die Parabel am ersten Berührungspunkte berührt.“

Oder: „Berühren die Seiten eines Dreiecks eine Parabel, und man ziehet durch zwei Eckpunkte desselben Parallelen mit den gegenüberliegenden Seiten, so bildet sich ein Parallelogramm, dessen durch jene Parallelen bestimmter vierter Eckpunkt in der Parabel-Sehne liegt, welche die Berührungspunkte derjenigen Seiten des Dreiecks verbindet, die zu Seiten des Parallelogramms geworden sind.“

Umkehrung: „Ziehet man aus einem beliebigen Punkte der Berührungssehne zweier Berührenden an einer Parabel zwei Parallelen mit den Berührenden, und verbindet endlich die beiden Schnittpunkte in den Berührenden, welche sich hiedurch ergeben, so ist die Verbindungslinie eine neue Berührende an der Parabel.“

Plücker hat in seinen analytisch-geometrischen Entwicklungen, Th. I. S. 161. diese Sätze analytisch bewiesen.

5) $\mathfrak{A}_2$ sei der Scheitelpunkt des zum Punkte P_2 gehörigen Durchmessers P_2H_2. An demselben werde eine Berührende gezogen, welche P_2M in S und P_2M_1 in S_1 schneide, und, nach §. 12. 4., halbire. Diese Berührende schneide PP_1 in V_2 und aus V_2 werde zu $\mathfrak{U}u$ das Loth V_2W_2 gefällt. Dann ist (§. 12. 1.) W_2 der Mittelpunkt von H_2G_2. Da nun auch $H_1H_2 = G_2H$, so ist W_2 auch der Mittelpunkt von H_1H, und hieraus weiter V_2 der Mittelpunkt von PP_1. Ein entsprechender Satz muss auch von Berührenden gelten, welche an den Scheitelpunkten der Punkte P und P_1 gezogen werden.

Also: „Berührt eine Parabel die drei Seiten eines Dreiecks, so wird jede Seite dieses Dreiecks durch die am Scheitelpunkte des gegenüberliegenden Eckpunktes gezogene Berührende im Mittelpunkt geschnitten.“

Oder: „Die Tangente SS_1 ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller von den beiden festen Berührenden P_2M und P_2M_1 interceptirten Stücke aller übrigen geraden Linien, welche die Parabel berühren.“

Man kann diesen Satz auch anders, z. B. durch Transversalentheorie beweisen. Er findet sich auch in Plückers analytisch-geometrischen Entwicklungen, Th. I. S. 162.

§. 14.

Fig. 18 1) Es ist (§. 11. 3.) $\angle\, FP_2P = MP_2f_2$ und $FP_1P = MP_1f_1$

aber auch $\angle\, MP_2f_2 = MP_1f_1$,

mithin ist $\angle\, FP_2P = FP_1P$,

und auf ähnliche Art $\angle\, FP_2P_1 = FPP_1$.

Hieraus folgt, durch die Punkte F, P, P_1 und P_2 könne ein Kreis beschrieben werden.

Also: „Der Brennpunkt einer Parabel bildet mit den drei Schnittpunkten jeder drei Berührenden dieser Parabel ein Viereck, um welches ein Kreis beschrieben werden kann.“ — Oder: „Wird durch die drei Schnittpunkte von drei Berührenden an einer Parabel ein Kreis beschrieben, so gehet derselbe durch den Brennpunkt hindurch.“

2) Das Dreieck FPP_1 ist den Dreiecken FM_1P_2 und FP_2M ähnlich, und also von unveränderlicher Form, wo in der Parabel auch der Punkt M_2 genommen werde, wenn nur die Punkte M und M_1 unverändert bleiben. Dieser Satz schliesst den von §. 11. 3. ein. Er findet sich nebst dem vorigen und einigen andern hier mitgetheilten auch in J. H. Lambert's *Insigniores orbitae cometarum proprietates*, aber auf andre Art bewiesen.

3) Man denke die Punkte M, M_1 und also auch P_2 unveränderlich, dagegen M_2 und also auch P und P_1 veränderlich, indem sich M_2 immer mehr nach dem Punkte M zu bewege. Dann wird endlich M_2 mit M zusammenfallen, und dabei das Dreieck PP_1P_2 in einen solchen Zustand übergehen, dass der Punkt P_1 mit M, der Punkt P mit P_2 zusammenfällt. Wendet man nun hiebei immerfort den Satz 1. an, und denkt sich den Mittelpunkt des um das Dreieck PP_1P_2 beschriebenen Kreises, so wird dieser Mittelpunkt endlich in die Stelle Z kommen, wo sich ein aus P_2 gegen P_2M_1 errichtetes Loth mit dem Halbirungslothe von P_2M schneidet; der Radius des umschriebenen Kreises wird aber in die Linie $ZM = ZP_2$ übergehen, und der Kreis die Linie P_2M_1 berühren. Dabei wird aber der Kreis immerfort durch den Brennpunkt F gehen.

Also: „Sind zwei Berührende an einer Parabel gezogen, und man beschreibt einen Kreis der durch den Schnittpunkt der beiden Berührenden und den Berührungspunkt der einen Berührenden hindurchgehet, die andre Berührende aber berührt, so gehet dieser Kreis durch den Brennpunkt der Parabel hindurch.“

Dieser Satz folgt übrigens auch ganz einfach daraus, dass der Winkel P_2FM immer das Supplement vom Winkel MP_2M_1 ist. (S. §. 11. 5.)

§. 15.

1) Die Richtlinie Uu werde von der Berührenden P_2M in E, von P_2M_1 in E_1 geschnitten. Gegen diese Berührenden rechtwinklig ziehe man die Geraden Ep, E_1p_1, wo p und p_1 die Schnittpunkte dieser Lothe mit P_2M_1 und P_2M bezeichnen mögen. Dann sind diese Lothe (nach einer Umkehrung von §. 11. 5.) Berührende an der Parabel. Vermittelst §. 13. 1. findet man nun, dass auf der Berührenden P_2M die drei in P_2 begrenzten Stücke P_2p_1, P_2P_1 und P_2E sich unter einander so verhalten, wie auf P_2M_1 die drei in M_1 begrenzten Theile M_1E_1, M_1P, M_1p. Durch Bildung von Proportionen für Differenzen solcher Stücke ergiebt sich sodann, dass sich auch die Linien P_1p_1, EP_1 wie die E_1P und Pp verhalten müssen. Fig. 19

Man fälle jetzt aus P und P_1 zu den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks PP_1P_2 die Lothe PR und P_1R_1, so werden dieselbe den Linien Ep und E_1p_1 beziehungsweise parallel sein. Der Schnittpunkt der Richtlinie mit PR heisse T', der mit P_1R_1 heisse T'', so bekommt man, der Parallelen wegen,

$$\frac{E^1T'}{T'E} = \frac{E_1P}{Pp} \text{ und } \frac{E_1T''}{T''E} = \frac{P_1p_1}{EP_1}.$$

Nun ist aber
$$\frac{P_1p_1}{EP_1} = \frac{E_1P}{Pp}$$

mithin auch
$$\frac{E_1T'}{T'E} = \frac{E_1T''}{T''E}.$$

Hieraus erhellt, der Punkt T' müsse mit T'' einerlei sein, beide also in einen einzigen Punkt T zusammenfallen. Die Lothe PR und P_1R_1 schneiden einander also in einem Punkte der Richtlinie. Fällt man nun auch aus P_2 ein Loth gegen PP_1, so muss dasselbe durch den Schnittpunkt jener beiden Lothe hindurchgehen, weil in jedem Dreiecke die drei Lothe, die aus den Eckpunkten zu den gegenüberliegenden Seiten gefällt werden, einander in einem einzigen Punkte, dem Perpendikelschnittpunkte des Dreiecks, treffen.

Also: „Der Perpendikelschnittpunkt eines Dreiecks, dessen drei Seiten eine Parabel berühren, ist ein Punkt der Richtlinie.

Steiner giebt in den *Ann. de Math.* T. 19. p. 58 u. 59. einen andern Beweis dieses Satzes.

2) Man denke wieder, wie in §. 14. 3., die Berührenden P_2M und P_2M_1 fest liegend, die Berührende PP_1 aber beweglich und endlich in P_2M übergehend. Dann gehet das Loth P_1R_1 endlich in ein aus M auf P_2M_1 gefälltes Loth über, die Lothe PR und P_2R_2 gehen aber beide in eine durch P_2 lothrecht gegen P_2M gezogene Linie über. Da nun immerfort und auch in diesem Grenzfalle der Perpendikelschnittpunkt ein Punkt von Uu sein muss, so müssen jene beiden Linien sich in einem Punkte V der Richtlinie schneiden, und man hat den Satz:

„Wird eine Parabel von zwei Geraden berührt, und aus dem Schnittpunkte dieser Berührenden ein Loth gegen die eine Berührende errichtet, aus dem Berührungspunkte eben dieser Berührenden aber auch ein Loth auf die andre Berührende gefällt, so ist der Schnittpunkt beider Lothe ein Punkt der Richtlinie.“

§. 16.

In dem bisher Vorgetragenen sind die Mittel zur Auflösung einer Menge von Aufgaben enthalten. Wir wollen einige derselben hier aufstellen, und zum Theil mit Andeutungen über ihre Auflösung begleiten.

1) Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben ist der Brennpunkt, und entweder a) zwei Punkte der Parabel, oder b) zwei Berührende, oder c) eine Berührende und ein Punkt der Parabel.

2) Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben ist die Richtlinie und entweder a) zwei Punkte, oder b) zwei Berührende, oder c) ein Punkt und zwei Berührende der Parabel.

3) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn einer seiner Brennpunkte gegeben ist, und entweder a) drei Punkte des Kegelschnitts, oder b) drei Berührende, oder c) zwei Punkte und eine Berührende, oder d) ein Punkt und zwei Berührende.

Diese Aufgaben kommen in ihrer Auflösung auf Berührungsaufgaben zurück. Es kommt immer nur darauf an, den Richtkreis zu construiren, der den nicht gegebenen Brennpunkt zum Mittelpunkte hat.

4) Drei Berührende P_1P_2, PP_2 und PP_1 einer Parabel sind gegeben, man soll den Brennpunkt und die Richtlinie derselben bestimmen.

Diese Aufgabe ist eine unbestimmte. Die drei Berührenden bilden, indem sie sich in drei Punkten schneiden, ein Dreieck. Beschreibt man einen Kreis um dieses Dreieck, so kann jeder Punkt dieses Kreises zum Brennpunkte genommen werden. Bestimmt man den Perpendikelschnittpunkt des Dreiecks, so kann jede Gerade, die durch diesen Punkt hindurchgezogen wird, zur Richtlinie genommen werden.

Ist aber ein beliebiger Punkt des umschriebenen Kreises zum Brennpunkte der Parabel gewählt, so kann nicht jede durch den Perpendikelschnittpunkt gezogene Gerade zur Richtlinie genommen werden. Umgekehrt, wenn eine beliebige durch den Perpendikelschnittpunkt gezogene Gerade zur Richtlinie gewählt ist, darf nicht mehr jeder beliebige Punkt des umschriebenen Kreises zum Brennpunkte dienen. Hieraus entstehen folgende zwei Aufgaben:

a) Ein beliebiger Punkt F des um $\triangle PP_1P_2$ umschriebenen Kreises ist als Brennpunkt angenommen; man soll die zugehörige Richtlinie bestimmen. Fig. 20

Der Satz §. 10. 2. führt zur Auflösung. Man fälle vom Punkte F auf P_1P_2, P_2P, PP_1 nach der Reihe die Lothe FK, FK_1, FK_2. Dann müssen die Punkte K, K_1, K_2 Punkte des Scheitellothes sein. So ergiebt sich hier nebenbei der Satz: „Werden aus einem Punkte des um ein Dreieck beschriebenen Kreises Lothe zu den Seiten des Dreiecks gefällt, so liegen die drei Fusspunkte dieser Lothe in einer geraden Linie.“ Dieser Satz ist bekannt genug, und kann auch leicht anderweitig, z. B. folgendermassen bewiesen werden. Man verlängere FK bis zum Punkte L des Kreises, und ziehe FP_1, FP_2 und PL. Dann wird, wegen der rechten Winkel an K und K_2, ein Kreis, dessen Durchmesser FP_1, durch K und K_2 hindurchgehen, und folglich der Winkel $FP_1K_2 = FKK_2$ sein. Es ist aber auch $FP_1K_2 = FLP$ (als Peripheriewinkel über dem Bogen FP), mithin $FKK_2 = FLP$ und KK_2 parallel mit LP. Auf gleiche Art wird ein Kreis, dessen Durchmesser FP_2, durch K und K_1

gehen, und also der Winkel $FKK_1 = FP_2P$ sein; da nun auch $FP_2P = FLP$, so folgt KK_1 parallel mit LP. Die beiden Geraden KK_1 und KK_2, welche den Punkt K gemein haben, sind also derselben Geraden parallel, müssen folglich nur eine Gerade bilden.

Hat man auf die angegebene Art das Scheitelloth, so ergiebt sich auch leicht die Richtlinie. Dabei findet sich der Satz: „Werden jene drei Lothe FK, FK_1 und FK_2 um gleich lange Stücke verlängert, so dass $KG = FK$ u. s. w., so liegen die Punkte G, G_1, G_2 in einer Geraden, welche durch den Perpendikelschnittpunkt des Dreiecks gehet.“

b) Eine beliebige Gerade Uu, die durch den Perpendikelschnittpunkt T des Dreiecks PP_1P_2 hindurch gehet, ist zur Richtlinie gewählt; man soll den zugehörigen Brennpunkt bestimmen.

Die Aufgabe kommt darauf zurück, einen Punkt F in dem um das Dreieck beschriebenen Kreise zu bestimmen, welcher die Eigenschaft hat, dass die Fusspunkte der aus ihm auf die Seiten gefällten Lothe eine Gerade KK_1K_2 bestimmen, welche der gegebenen Uu parallel ist. Der oben geführte Beweis des Satzes, dass die Punkt K, K_1, K_2 eine gerade Linie bilden, leitet leicht zu folgender Auflösung dieser Aufgabe. Man ziehe PL parallel Uu, bis PL den um das Dreieck PP_1P_2 beschriebenen Kreis in L trifft, fälle aus L ein Loth LK auf P_1P_2 und verlängere dieses, bis es jenen Kreis in einem Punkte F trifft. Dieser Punkt wird der gesuchte Brennpunkt sein.

Wir sind aber hiedurch noch zu folgendem Satze geführt: „Ziehet man aus den Eckpunkten P, P_1 und P_2 eines Dreiecks drei einander parallele Gerade, welche den um das Dreieck beschriebenen Kreis in den Punkten L, L_1, L_2 schneiden, und fället aus diesen Punkten die Lothe LK, L_1K_1 und L_2K_2 zu den Seiten P_1P_2, P_2P, PP_1, so treffen sich diese Lothe in einem Punkte F des umschriebenen Kreises.“

Man vergleiche hierbei Crelle's Journal B. 2. S. 97., B. 3. S. 285 u. f., B. 5. S. 165.

5) Zwei Berührende für eine Parabel sind gegeben, und in der einen auch der Berührungspunkt; man soll den Brennpunkt und die Richtlinie der Parabel bestimmen.

Die Aufgabe ist eine unbestimmte. Aus §. 14. 3. erhält man leicht einen Kreis, als Ort des gesuchten Brennpunktes, und aus §. 15. 2. einen Punkt, durch welchen die Richtlinie hindurchgehen muss. Wird dann in dem Kreise ein beliebiger Punkt als Brennpunkt angenommen, so ist es sehr leicht, die zugehörige Richtlinie zu bestimmen. Wird umgekehrt durch den Punkt, durch welchen die Richtlinie hindurchgehen soll; eine beliebige Gerade gezogen und als Richtlinie angenommen, so ist es eben so leicht, den zugehörigen Brennpunkt zu finden.

6) Zwei Berührende für eine Parabel sind gegeben und auch in jeder der Berührungspunkt; man soll den Brennpunkt und die Richtlinie bestimmen.

Diese Aufgabe ist eine bestimmte. Durch §. 14. 3. bekommt man zwei Kreise, deren zweiter Schnittpunkt, ausser dem Schnittpunkte der Berührenden, durch den die Kreise hindurchgehen, der gesuchte Brennpunkt ist, und durch §. 15. 2. findet man zwei Punkte, welche in der Richtlinie liegen, und also diese bestimmen. — Will man noch die Parabel selbst construiren, so lassen sich dazu bequem mehre Sätze von §. 13. benutzen.

7) Vier Berührende für eine Parabel sind gegeben; man soll den Brennpunkt und die Richtlinie bestimmen.

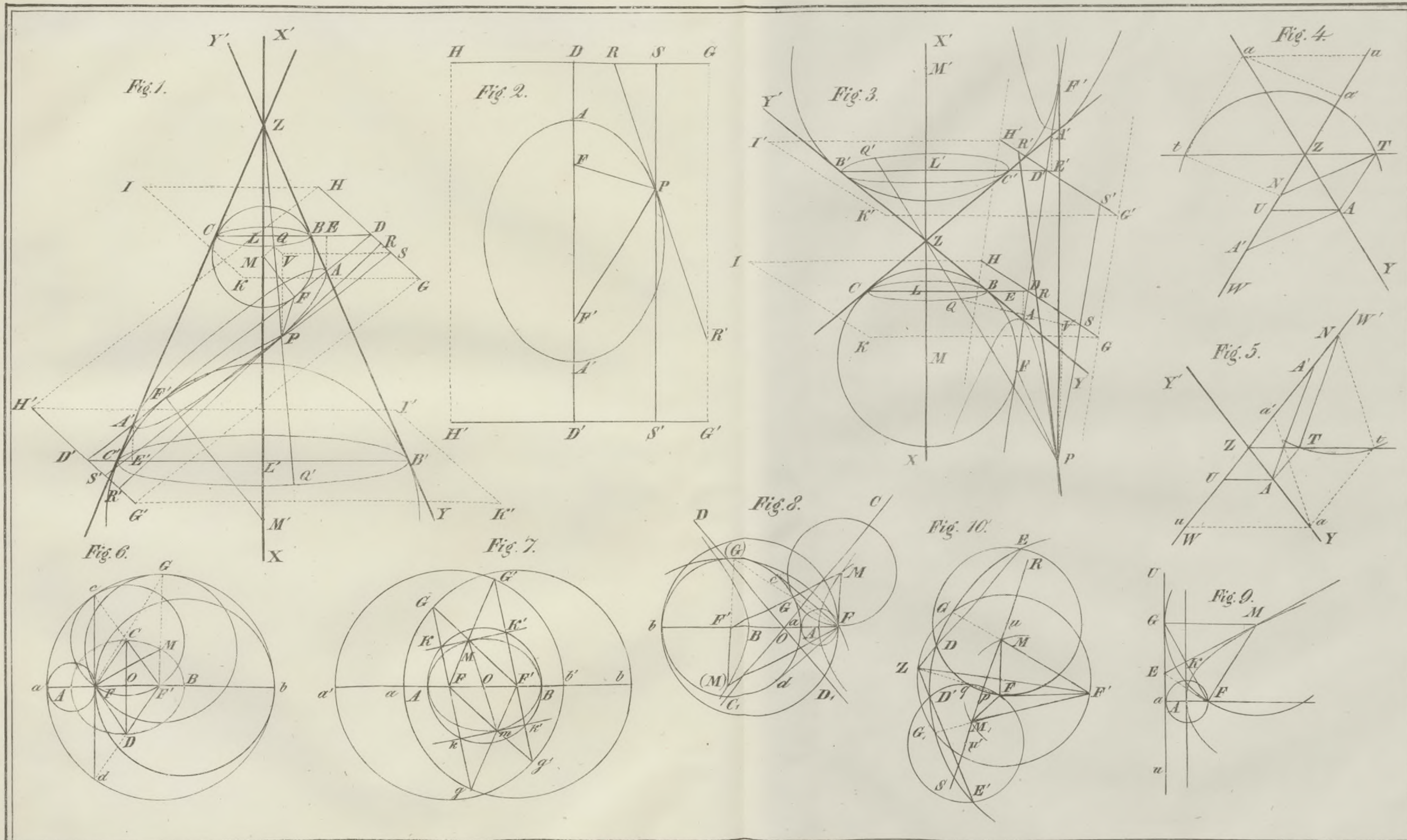
Die vier gegebenen Geraden geben, indem man sie auf alle mögliche Arten zu dreien verbindet, vier Dreiecke. Beschreibt man um jedes dieser Dreiecke einen Kreis, so findet man einen Punkt, durch den alle vier Kreise hindurchgehen, und dieser Punkt ist der gesuchte Brennpunkt. Bestimmt man für jedes der vier Dreiecke den Perpendikelschnittpunkt, so liegen diese vier Punkte in einer Geraden, welche die gesuchte Richtlinie ist.

Man vergleiche hier Crelle's *Journal* B. 3. S. 290. und B. 5. S. 167.

Verbesserungen.

Seite	3.	Zeile	7. von u.	statt Doppelfläche l. Doppelkegelfläche.
—	5.	—	5. von o.	statt Unendlich l. Unendliche.
—	17.	—	7. —	statt $=$ TZN l. $\cong$ TZN.
—	21.	—	13. —	statt §. 8. l. §. 9.
—	—	—	2. von u.	hinter Geometrie I. füge hinzu §. 345.
—	29.	—	11. von o.	statt M_1 l. M_2.

Gedruckt in der Wedelschen Hofbuchdruckerei.



Lith. v. Wedel in Danzig.

Ed. Hessland fec.

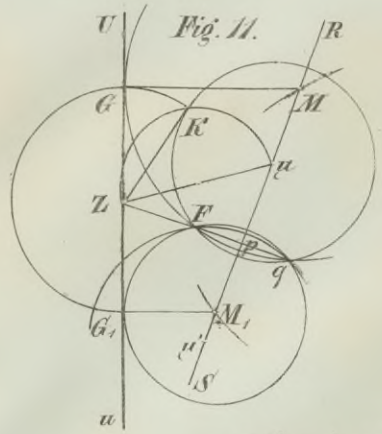


Fig. 11.

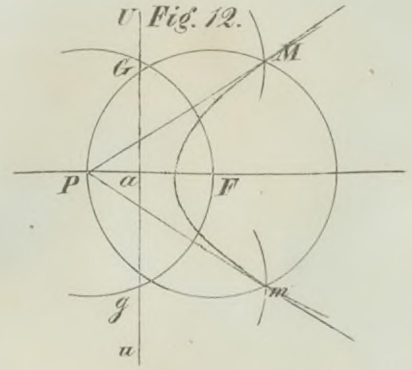


Fig. 12.

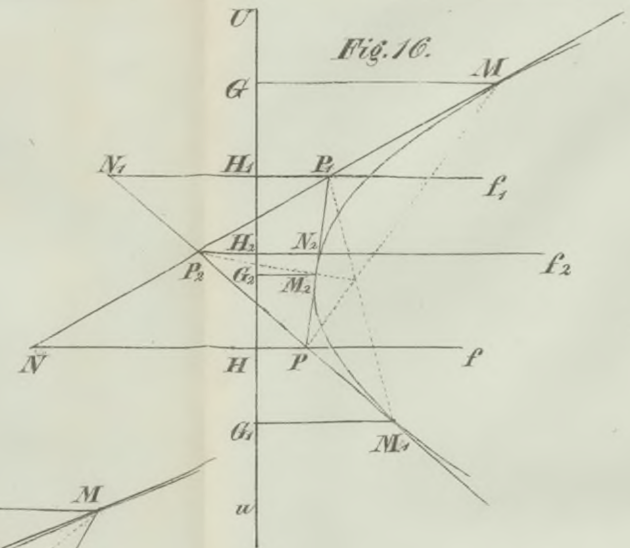


Fig. 16.

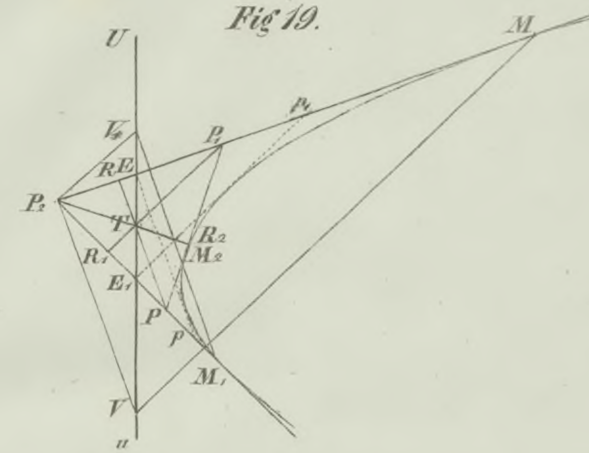


Fig. 19.

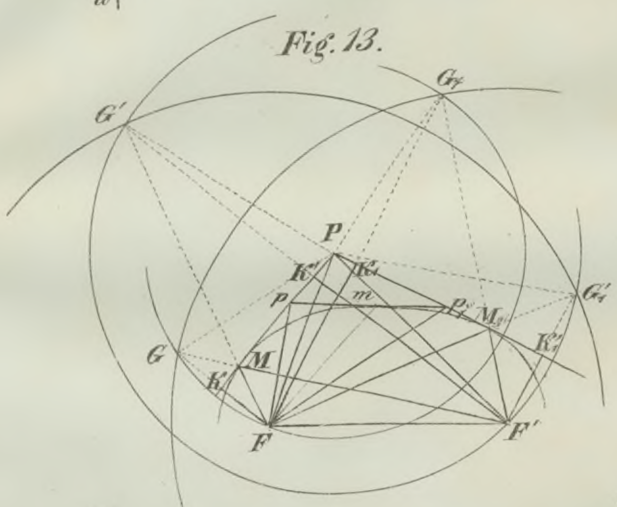


Fig. 13.

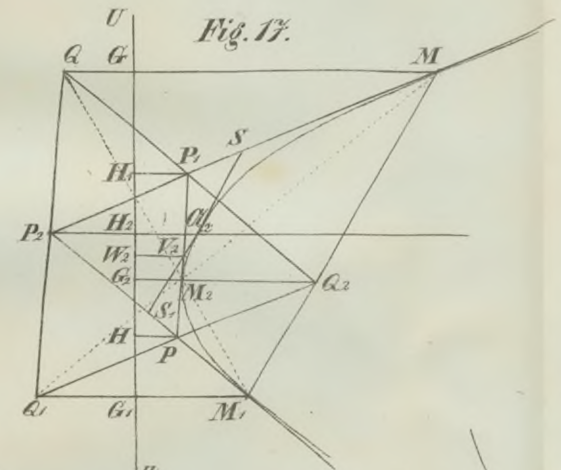


Fig. 17.

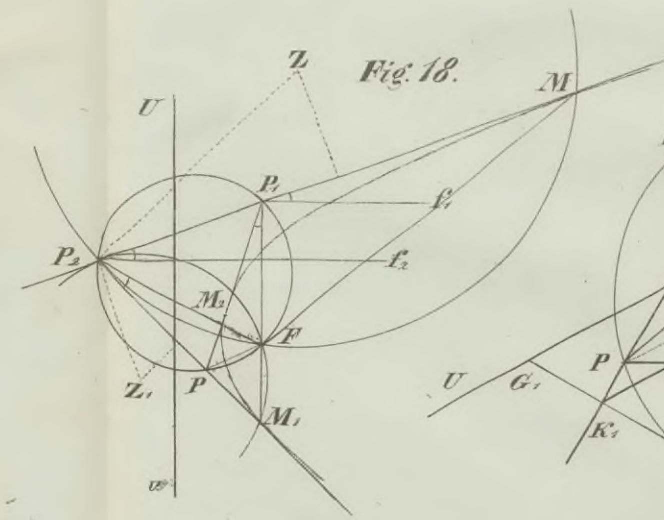


Fig. 18.

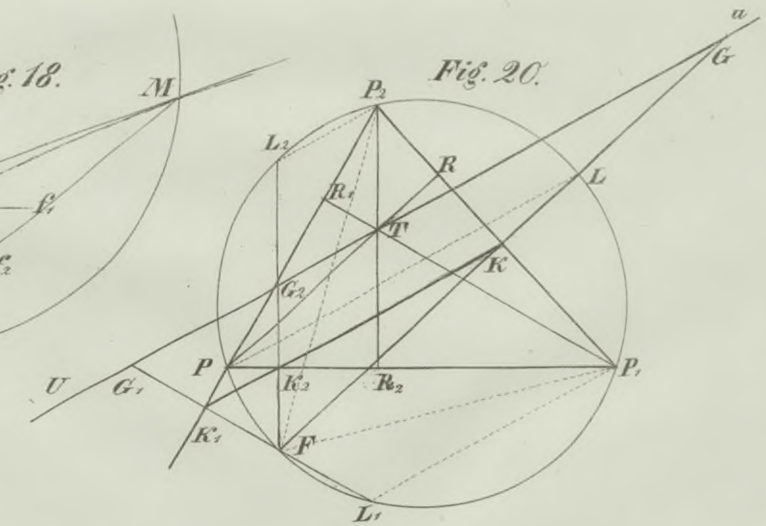


Fig. 20.

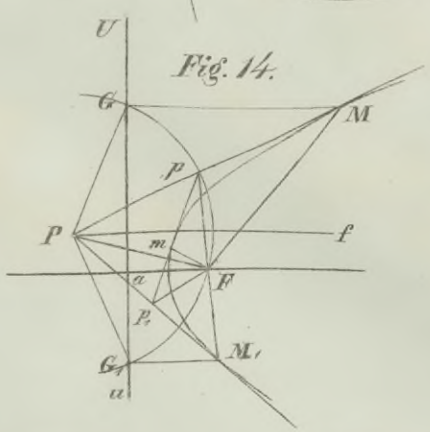


Fig. 14.

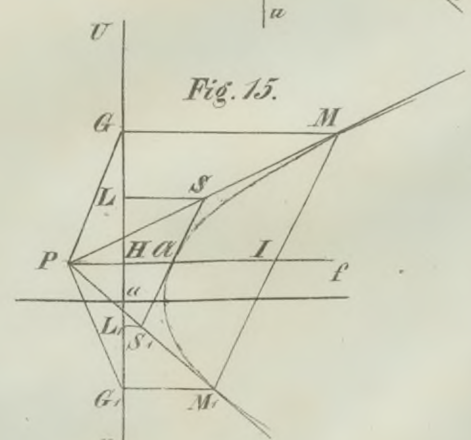


Fig. 15.

Lith. v. Wedel in Danzig.

Ed. Hufeland fec.